3 Algebraické výrazy

> V knize přírody může číst jen ten, kdo zná jazyk, ve kterém je napsána. Jejím jazykem je matematika a jejím písmem jsou matematické vzorce. (Galileo Galilei)

Algebraickým výrazem rozumíme zápis, ve kterém se vyskytují **konstanty**, které nemění svou hodnotu a které jsou vyjádřeny čísly, dále **proměnné** a **operace s**čítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování prováděné s konstantami a proměnnými. **Proměnnou** rozumíme znak, který označuje libovolné číslo z určité množiny, kterou nazýváme **obor proměnné** nebo **definiční obor výrazu**. Pokud není obor proměnné výslovně určen, považujeme za obor proměnné množinu všech čísel, která lze do výrazu dosadit, aniž ztratí smysl některá z uvedených operací (nedochází např. k dělení nulou, odmocňování záporného čísla v reálném výrazu apod.). Říkáme, že pro hodnoty z definičního oboru má výraz smysl. Dosadíme-li za proměnné do výrazu libovolná čísla, pro která má daný výraz smysl, a provedeme všechny předepsané operace, dostaneme jako výsledek číslo – hodnotu výrazu.

3.1 Mnohočleny

Mnohočleny – jsou zvláštním případem výrazů. Mnohočlen (polynom) n-tého stupně jedné proměnné je výraz tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\,;\;\; a_n \neq 0\,,$$

kde $a_n; a_{n-1}; \ldots; a_1; a_0$ jsou konstanty (koeficienty) mnohočlenu, x je proměnná. Výrazy $a_k x^k$; $k = 0,1;..;n$ jsou členy mnohočlenu. Mnohočlen 1. stupně nazýváme lineární, mnohočlen 2. stupně kvadratický (popř. kvadratický trojčlen), mnohočlen 3. stupně pak kubický.

Pojem mnohočlenu lze zobecnit na případ více proměnných, kde místo mocnin x^n jedné proměnné vystupují součiny mocnin několika proměnných. Obecný zápis takového mnohočlenu by byl komplikovaný, uveďme tedy jen několik příkladů:

$$2x^3y - 5xy^2 + y + 1\,;\;\; x^2 - 3y^2 + \sqrt{2}\,;\;\; x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$$

jsou mnohočleny dvou proměnných $x; y$;

$$x^7 - y + z^2\,;\;\; xyz - 5\,;\;\; xy + yz + xz$$

jsou mnohočleny tří proměnných $x; y; z$.

Zvláštním případem mnohočlenu je **jednočlen** – výraz neobsahující sečítání a odčítání (např. $-2a^2bc^3$). Mnohočlen lze pak chápat jako součet či rozdíl několika jednočlenů.

<u>Sečítání a odčítání:</u>

Sečítat a odčítat můžeme jen ty členy mnohočlenu, které se liší pouze konstantou:

$$\left(x^3 + 3x^2y + 2xy^2 + y^3\right) + \left(x + 2x^2y - 3xy^2\right) = x^3 + x + \underbrace{3x^2y + 2x^2y} + \underbrace{2xy^2 - 3xy^2} + y^3 =$$

$$= x^3 + x + 5x^2y - xy^2 + y^3$$

Násobení:

Při **násobení jednočlenů** se řídíme pravidly pro násobení mocnin:

1. Příklad:

$$(-2a^2bc^3)(3ab^3c^2) = (-2\cdot 3)\cdot(a^2a)\cdot(bb^3)\cdot(c^3c^2) = -6a^3b^4c^5$$

Při násobení **mnohočlenů** je třeba každý člen jednoho mnohočlenu násobit každým členem druhého mnohočlenu.

2. Příklad:

$$\begin{aligned}(2x-3)(3x^2+5x-6) &= 2x\cdot 3x^2 - 3\cdot 3x^2 + 5x\cdot 2x + 5x\cdot(-3) - 6\cdot 2x - 6\cdot(-3) = \\ &= 6x^3 - 9x^2 + 10x^2 - 15x - 12x + 18 = 6x^3 + x^2 - 27x + 18\end{aligned}$$

Dělení:

Při dělení **jednočlenů** se řídíme pravidly pro dělení mocnin, např:

3. Příklad:

$$(-6a^2bc^3):(3ab^3c^2) = (-6:3)\cdot(a^2:a)\cdot(b:b^3)\cdot(c^3:c^2) = -2ab^{-2}c$$

Při dělení **mnohočlenu jednočlenem** je třeba každý člen mnohočlenu dělit jednočlenem:

4. Příklad:

$$(15a^3x^5 - 10a^4x^4 - 25a^5x^3):5a^3x^3 = 15a^3x^5:5a^3x^3 - 10a^4x^4:5a^3x^3 - 25a^5x^3:5a^3x^3 = 3x^2 - 2ax - 5a^2$$

Dělení **mnohočlenu mnohočlenem** se řídí stejnými principy jako dělení přirozených čísel v desítkové soustavě:

5. Příklad: Vydělme čísla $10\ 667:45$ a mnohočleny $(x^4-5x^2+5x-2):(x^2-2x+2)$.

Písemné dělení dvou čísel:

obvyklý zápis:

$$\begin{array}{l} 10\ 667:45 = 237\ zb.\ 2 \\ \ \ 1\ 66 \\ \ \ \ \ 317 \\ \ \ \ \ \ \ 2 \end{array}$$

podrobný zápis

$$\begin{array}{l} (1\cdot 10^4 + 0\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + 7):(4\cdot 10^1 + 5) = 2\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 7 \\ \underline{\quad -9\cdot 10^3 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \qquad 1\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 \\ \underline{\quad -(1\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1)} \\ \qquad\qquad 3\cdot 10^2 + 1\cdot 10^1 + 7 \\ \underline{\qquad\quad -(3\cdot 10^2 + 1\cdot 10^1 + 5)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \end{array}$$

Pomocí podrobného zápisu dělení dvou čísel lépe pochopíme dělení mnohočlenů:

$$\begin{array}{l} (x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 5x - 2):(x^2 - 2x + 2) = x^2 + 2x - 3\ zb.\ -5x + 4 \\ \underline{-(x^4 - 2x^3 + 2x^2)\qquad\qquad} \\ \qquad 2x^3 - 7x^2 + 5x \\ \underline{\quad -(2x^3 - 4x^2 + 4x)\quad} \\ \qquad\qquad -3x^2 + \ x - 2 \\ \underline{\qquad -(-3x^2 + 6x - 6)} \\ \qquad\qquad\qquad -5x + 4 \end{array}$$

V případě dělení čísel jsme dostali zbytek 2, v případě dělení mnohočlenů pak zbytek $-5x+4$. Výsledek dělení čísel lze zapsat ve tvaru

$$10\ 667:45=237+\frac{2}{45},$$

podobně dělení mnohočlenů ve tvaru

$$(x^4+0x^3-5x^2+5x-2):(x^2-2x+2)=x^2+2x-3+\frac{-5x+4}{x^2-2x+2}$$

V případě dělení mnohočlenů více proměnných je postup analogický:

$$\begin{array}{l}
(a^5-2a^4b-4a^3b^2-5a^2b^3-23ab^4-7b^5):(a^3+3ab^2+b^3)=a^2-2ab-7b^2\\
\underline{-(a^5 \qquad +3a^3b^2+\ a^2b^3)}\\
\qquad -2a^4b-7a^3b^2-6a^2b^3-23ab^4\\
\qquad \underline{-(2a^4b \qquad -6a^2b^3\ -2ab^4)}\\
\qquad\qquad -7a^3b^2 \qquad -21ab^4-7b^5\\
\qquad\qquad \underline{-(-7a^3b^2 \qquad -21ab^4-7b^5)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Často bývá výhodné jednotlivé členy mnohočlenu označit jedním písmenem, např. v mnohočlenu $x^2y^4-x^6y^2$ položíme $A=xy^2$; $B=x^3y$, dostaneme $x^2y^4-x^6y^2=A^2-B^2$, popř. $C=x^2y^4$; $D=x^6y^2$, pak obdržíme $x^2y^4-x^6y^2=C-D$. Při násobení popř. umocňování mnohočlenů lze s výhodou použít následujících vzorců:

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ (druhá mocnina dvojčlenu)

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

$(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2BC+2AC$ (druhá mocnina trojčlenu)

$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ (třetí mocnina dvojčlenu)

$(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$

6. Příklad: Roznásobme $\left(4x^2y-3xy^3\right)^2$:

a) roznásobení: $\left(4x^2y-3xy^3\right)^2=$

$$=\left(4x^2y-3xy^3\right)\cdot\left(4x^2y-3xy^3\right)=4x^2y\cdot4x^2y-3xy^3\cdot4x^2y-4x^2y\cdot3xy^3+3xy^3\cdot3xy^3=$$
$$=16x^4y^2-12x^3y^4-12x^3y^4+9x^2y^6=16x^4y^2-24x^3y^4+9x^2y^6$$

b) úprava podle vzorce:

$$\left(4x^2y-3xy^3\right)^2= \qquad\qquad =16x^4y^2-24x^3y^4+9x^2y^6$$
$$(A\quad -\quad B\quad)^2=\left|\,A=4x^2y;\ B=3xy^3\,\right|=\quad A^2\quad-\quad 2AB\quad+\quad B^2$$

7. Příklad: Roznásobme

$$(x-3y+2z)^2=x^2+(-3y)^2+(2z)^2+2x(-3y)+2(-3y)(2z)+2x(2z)$$
$$(A+B+C)^2=A^2\quad+B^2\quad+C^2\quad+2A\ \ B\quad+2\ \ B\quad C\quad+2AC$$
$$=x^2+9y^2+4z^2-6xy-12yz+4xz$$

Rozklad mnohočlenů na součin:

Jedná se o vyjádření mnohočlenu ve tvaru součinu několika mnohočlenů. Provádí se nejčastěji pomocí tzv. vytýkání nebo použitím vhodných vzorců.

Vytýkání: Je založeno na distributivním zákonu $A \cdot C + B \cdot C = C \cdot (A + B)$. V konkrétních případech bývá největším problémem poznat společného dělitele jednotlivých členů.

8. Příklad: $6x^2y^3 - 8x^4yz = (2x^2y) \cdot (3y^2) - (2x^2y) \cdot (4x^2z) = 2x^2y(3y^2 - 4x^2z)$

Použití vzorců: Při rozkladu na součin lze často použít výše uvedených vzorců pro druhé resp. třetí mocniny dvojčlenu, např:

9. Příklad:

$$x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots = (x - 3y)^3$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = |A = x; B = 3y| = (A - B)^3$$

Lze použít i další vzorce:

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ (rozdíl čtverců)

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ (rozdíl třetích mocnin)

$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ (součet třetích mocnin)

Pozor: studenti se často pokoušejí „vymyslet“ i vzoreček pro součet čtverců, tj. pro rozklad dvojčlenu $A^2 + B^2$. Tento dvojčlen lze rozložit pouze jeho převodem na **rozdíl čtverců**, k čemuž ovšem potřebujeme imaginární jednotku:

$$A^2 + B^2 = A^2 + (-i^2) \cdot B^2 = A^2 - B^2i^2 = (A - Bi)(A + Bi)$$

Součet čverců lze tedy rozložit na součin pouze v komplexním oboru a my tento rozklad potřebovat nebudeme.

Často vede k cíli i „postupné vytýkání“, přičemž nemusíme vytýkat jen jednočleny, např.:

$$r^3 - 7r^2 - rs^2 + 7s^2 = \underbrace{r^3 - 7r^2} - \underbrace{rs^2 + 7s^2} = r^2(r - 7) - s^2(r - 7) =$$

$$= (r - 7)(r^2 - s^2) = (r - 7)(r - s)(r + s)$$

Rozklad kvadratického trojčlenu – je důležitou a často se vyskytující úlohou. Kvadratický trojčlen lze často rozložit pomocí tzv. **kořenových činitelů** – je to jednoduchý trik, který vysvětlíme na následujícím příkladu:

Vynásobme $(x - 3) \cdot (x - 2) = x^2 - 3x - 2x + 2 \cdot 3 = x^2 + (-3 - 2)x + 2 \cdot 3$

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = \qquad x^2 + \quad p \quad x + \quad q$$

(zde jsme záměrně některé operace neprovedli).

Tento postup musí fungovat i obráceně – „zprava doleva“. Máme-li za úkol rozložit trojčlen $x^2 + px + q$ na součin $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, hledáme dvě čísla x_1; x_2 (kořeny kvadratického trojčlenu), jejichž součin je roven číslu q a součet s opačným znaménkem číslu p.

10. Příklad: Rozložme trojčlen $x^2 + 7x + 10$.

Řešení: Hledaný rozklad bude tvaru $(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, kde v našem případě platí $-x_1-x_2=7$ a $x_1\cdot x_2=10$. Je zřejmé, že těmto podmínkám vyhovují čísla $x_1=-2$; $x_2=-5$; hledaný rozklad je tedy $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=(x+2)\cdot(x+5)$.

Rozklad doplněním na čtverec: Provádíme tak, že „přinutíme fungovat“ druhou mocninu dvojčlenu a následně rozdíl čtverců:

11. Příklad: Rozložme na součin

$$x^2-6x+5=\underbrace{x^2-6x\;+\;??}_{A^2-2AB+B^2}+5=\underbrace{x^2-6x\;+9}_{A^2-2AB+B^2}-9+5=(x-3)^2-4=\underbrace{(x-3)^2}_{A^2}-\underset{B^2}{4}=$$

$$=[(x-3)-2]\cdot[(x-3)+2]=(x-5)(x-1)$$

(ověřte i postup z předchozího příkladu!)

12. Příklad: Rozložme na součin kvadratický trojčlen $x^2+2x+10$.
Pokusy o rozklad na kořenové činitele zřejmě k úspěchu nepovedou, pokusme se tedy doplnit na úplný čtverec:

$$x^2+2x+10=x^2+2x+1-1+10=(x+1)^2+9=(x+1)^2+3^2$$

Dospěli jsme nikoli k rozdílu, ale k součtu čverců, o kterém již víme, že je v oboru reálných čísel nerozložitelný. Daný mnohočlen v oboru reálných čísel nelze rozložit na součin.

Obecně platí: Každý mnohočlen stupně většího než dva lze v oboru reálných čísel rozložit na součin (tento rozklad však může být velmi komplikovaný). Kvadratický trojčlen může ale nemusí být rozložitelný.

Stanovení hodnoty výrazu: Jsou-li známy hodnoty proměnných, můžeme stanovit hodnotu výrazu.

13. Příklad: Stanovte hodnotu výrazu $(p-3n)(3p^2+2pn-7n^2)-[13n(3n^2-p^2)-17pn^2]$ pro $p=-3$; $n=-2$.
Řešení: $(p-3n)(3p^2+2pn-7n^2)-[13n(3n^2-p^2)-17pn^2]=$
$=[(-3)-3\cdot(-2)][3\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)\cdot(-2)-7\cdot(-2)^2]-\{13\cdot(-2)\cdot[3\cdot(-2)^2-(-3)^2]-17\cdot(-3)\cdot(-2)^2\}=$
$=(-3+6)(3\cdot 9+2\cdot 6-7\cdot 4)-[-26\cdot(3\cdot 4-9)+51\cdot 4]=$
$=3\cdot(27+12-28)-(-26\cdot 3+204)=3\cdot 11-(204-78)=33-126=-93$

Neřešené úlohy:
1) $a^2b+5-2c+3a^2b+7c+5+7c$
2) $5mn-4m^2n^2-8mn^2+3mn-mn^2-4m^2n^2$
3) $-1\dfrac{2}{3}xy^3+2x^3y-4\dfrac{1}{2}x^2y-xy^3-\dfrac{1}{2}x^2y-x^3y$
4) $(10a-6b+5c-4d)+(9a-2b-4c+2d)$
5) $(x^2+2x)-(y^2+2y)+(x+2xy+y)-(2x^2-3y^2+7)$
6) $(3a^{n+1}+10a^n-7a)+(a-9a^{n+1}-10a^n)$
7) $1.7r^2-10s^2-\{r^2-3s^2-[4.3r^2-(2r^2-7s^2)]\}$
8) $a^2-b^2-\{3ab-2b^2-[a^2+2ab-(b^2-ab)]\}$
9) $2m(10m-3n)-5\{n(5m+3n)-[3n^2-m(4m-6n)]\}$

10) $ab(a+b)-a\{b(3b-2a)-[a^2-b(3a-2b)]\}$

11) $(3x-5)(2x+1)$

12) $(5a-2)(4a+3)$

13) $(2x^3-5x^2+3x-2)(2x+3)$

14) $(2u^2-5v^2-3uv)(uv^2+3v^3-2u^2v)$

15) $20m^4n^3:5m^2n^3$

16) $-6a^3b^2c:(-2a^2bc)$

17) $(18p^4q^3-27p^3q^2):9p^2q$

18) $(18a^4x^3+24a^3x^4+6a^2x^5):6a^2x^3$

19) $(xy-7x+2y-14):(x+2)$

20) $(m^4-m^3n+m^2n^2-mn^3):(m^2+n^2)$

21) $(12z^6-7z^4+32z^3-13z^2-24z):(8z^3+4z^2-12z)$

22) $(13x^2y^3+9x^5-21xy^4+6y^5-15x^4y-8x^3y^2):(2x^2y+3y^3+3x^3)$

23) $(5a^2-3b)(5a^2+3b)$

24) $(4m^2+6n)(4m^2-6n)$

25) $(49-x^2y^2):(7-xy)$

26) $(100m^4-64n^6):(8n^3-10m^2)$

27) $(121c^2-169d^2):(13d+11c)$

28) $(100m^2-64n^2):(10m-8n)$

Roznásobte:

29) $(x+10)^2$

30) $(5ab-c)^2$

31) $(x^3-1)^2$

32) $(7x^4y^3+3x^2y)^2$

33) $(a+b+1)^2$

34) $(u^2+2u-3)^2$

35) $(a^2-1)^3$

36) $(7p^3+9q^4)^3$

37) $(a^n-a^{2n})^3$

Zapište jako druhou mocninu dvojčlenu

38) x^2+2x+1

39) $25x^2+20xy+4y^2$

34) $m^2-6mn+9n^2$

Doplňte na čtverec

41) m^2-2mn

42) $25x^2+49b^2$

43) $1+25b^2$

Upravte:

44) $(x+4)^2+4(x+1)^2$

45) $(a-1)^2-4(a+1)^2-6(a+1)(a-1)$

46) $[(m^2+2m)^2+(2m^2-m)^2]\cdot 5m$

47) $(3x+2)^3-(2x+3)^3-(3x-2)^3+(2x-3)^3-(6x-5)^2$

Rozložte na součin

48) $4x^3y^3-8x^2y^2$

49) $9a^3-6a^2b$

50) $10a^4b^3-15a^4b^2+20a^3b^4$

51) $-8x^4y^3-12x^2y^4-16x^5y^2$

52) $81a^2b^2-1$

53) $(x-y)^2-x^2y^2$

54) $(2x+3)^2-(x-1)^2$

55) $49(2m-3n)^2-9(m+n)^2$

56) m^3-27

57) $27x^3-8y^3$

58) Stanovte hodnoty výrazů:

a) $(p-4q)(3p^2+2pq-5q^2)-(12pq^2-10p^2q-2q^2)$; pro $p=2$; $q=-\dfrac{3}{5}$;

b) $(3k-2n)(3n^2+2kn+7k^2)-k[5(n^3+4k^2)+k^3]$; pro $k=-2.5$; $n=-2$;

Výsledky:

1) $4a^2b+12c+10$ **2)** $-8m^2n^2+8mn-9mn^2$ **3)** $-2\frac{2}{3}xy^3+x^3y-5x^2y$ **4)** $19a-8b+c$

5) $-x^2+2y^2+3x-y+2xy-7$ **6)** $-6a^{n+1}-6a$ **7)** $3r^2$ **8)** $2a^2$ **9)** $-mn$ **10)** a^3

11) $6x^2-7x-5$ **12)** $20a^2+7a-6$ **13)** $4x^4-4x^3+9x^2+5x+6$

14) $6u^5-13u^4v-7u^3v^2+7u^2v^3-5uv^4$ **15)** $4m^2$ **16)** $3ab$ **17)** $2p^2q^2-3pq$

18) $3a^2+4ax+x^2$ **19)** $y-7$ **20)** m^2-mn **21)** $\frac{3}{2}z^3-\frac{3}{4}z^2+\frac{7}{4}z+2$ **22)** $3x^2-7xy+2y^2$

23) $25a^4-9b^2$ **24)** $16m^4-36n^2$ **25)** $7+xy$ **26)** $8n^3+10m^2$ **27)** $11c-13d$

28) $10m+8n$ **29)** $x^2+20x+100$ **30)** $25a^2b^2-10abc+c^2$ **31)** x^6-2x^3+1

32) $49x^8y^6+42x^6y^4+9x^4y^2$ **33)** $a^2+b^2+1+2ab+2a+2b$ **34)** $u^4+4u^3-2u^2-12u+9$

35) $343p^9+1323p^6q^4+1701p^3q^8+729q^{12}$ **36)** $60x-63$ **37)** $a^{3n}-3a^{4n}+3a^{5n}-a^{6n}$

38) $(x+1)^2$ **39)** $(m-3n)^2$ **40)** $(5x+2y)^2$ **41)** n^2 **42)** $70bx$ **43)** $10b$ **44)** $5x^2+6x+20$

45) $-9a^2-10a+3$ **46)** $26m^6+25m^4$ **47)** $a^6-3a^4+3a^2-1$ **48)** $4x^2y^2(xy-2)$

49) $3a^2(3a-2b)$ **50)** $5a^3b^2(2ab-3a+4b^2)$ **51)** $-4x^2y^2(2x^2y+3y^2+4x^3)$ **52)** $(x+4)(3x+2)$

53) $(9ab-1)(9ab+1)$ **54)** $(x-y-xy)(x-y+xy)$ **55)** $(11m-24n)(17m-18n)$

56) $(m-3)(m^2+3m+9)$ **57)** $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$ **58)** a) 6 ; b) 148

3.2. Racionální lomené výrazy

Racionálním lomeným výrazem rozumíme výraz, který lze zapsat ve tvaru podílu dvou mnohočlenů. Užíváme zde stejných termínů jako u čísel a zlomků – čitatel, jmenovatel, nejmenší společný násobek a dělitel, společný jmenovatel apod. Racionální lomené výrazy můžeme podobně jako zlomky rozšiřovat, krátit, sečítat, odčítat násobit a dělit, a to podle stejných pravidel, jako zlomky. Navíc bychom měli vždy uvádět, kdy mají dané výrazy smysl.

1. Příklad: Zkraťme lomený výraz $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$

Řešení: Ve jmenovateli lomeného výrazu nesmí být nula. Jmenovatel lze upravit na tvar $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$, daný výraz má tedy smysl pro $x\neq -y$. Abychom mohli krátit, musíme najít společné dělitele čitatele a jmenovatele – provedeme to podobně jako u čísel – totiž rozkladem na „prvočinitele“ – tj. na mnohočleny, které již nelze rozložit na součin:

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)(x+y)}$$

Společným dělitelem čitatele a jmenovatele je tedy výraz $x+y$, který je při podmínce $x\neq -y$ nenulový, po zkrácení tedy dostáváme

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{x-y}{x+y}$$

2. Příklad: Zkraťme lomený výraz $\dfrac{3x^2+12x+12}{6x^2-24}$

Řešení (již stručně): $\dfrac{3x^2+12x+12}{6x^2-24}=\dfrac{3(x^2+4x+4)}{6(x^2-4)}=\dfrac{(x+2)^2}{2(x+2)(x-2)}=\dfrac{x+2}{2(x-2)}$; $x\neq \pm 2$

Sečítání a odčítání lomených výrazů:

3. Příklad: Sečtěme $\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{a-1}{a+1}$.

Řešení: Daný výraz má smysl pro $a \neq \pm 1$. Jmenovatelé již nelze rozložit na součin a nemají společné dělitele – společným jmenovatelem bude tedy součin $(a-1)(a+1)$:

$$\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-1}{a+1}=\frac{(a+1)(a+1)}{(a-1)(a+1)}+\frac{(a-1)(a-1)}{(a-1)(a+1)}=\frac{(a+1)^2}{a^2-1}+\frac{(a-1)^2}{a^2-1}=\frac{(a+1)^2+(a-1)^2}{a^2-1}=$$

$$=\frac{a^2+2a+1+a^2-2a+1}{a^2-1}=\frac{2(a^2+1)}{a^2-1}$$

Opět upozorňujeme, že výraz a^2+1 již nelze v reálném oboru rozložit a poslední uvedený výraz již nelze krátit.

4. Příklad: Sečtěme:

$$\frac{r(r+4)}{(r-4)^2}+\frac{r^2+4r}{16-r^2}=\frac{r(r+4)}{(r-4)^2}+\frac{r^2+4r}{(4-r)(4+r)}=\frac{r(r+4)}{(r-4)^2}-\frac{r^2+4r}{(r-4)(4+r)}=\frac{r(r+4)}{(r-4)^2}-\frac{r(r+4)(r-4)}{(r-4)^2(r+4)}=$$

$$=\frac{r(r+4)^2-r(r-4)(r+4)}{(r-4)^2(r+4)}=\frac{r(r+4)\left[(r+4)-(r-4)\right]}{(r-4)^2(r+4)}=\frac{8r}{(r-4)^2}.$$

Násobení a dělení racionálních lomených výrazů

5. Příklad: Násobme lomené výrazy:

$$\frac{8ab}{3c^2d^2}\cdot\frac{21c^4d^4}{32a^3b^3}=\frac{8ab\cdot 21c^4d^4}{3c^2d^2\cdot 32a^3b^3}=\frac{21c^4d^4\cdot 8ab}{3c^2d^2\cdot 32a^3b^3}=\frac{21c^4d^4}{3c^2d^2}\cdot\frac{8ab}{32a^3b^3}=\frac{7c^2d^2}{1}\cdot\frac{1}{4a^2b^2}=\frac{7c^2d^2}{4a^2b^2};$$

$$\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{y^2-x^2}+1\right)=\frac{y^2-x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2+y^2-x^2}{y^2-x^2}=\frac{y^2-x^2}{y^2}\cdot\frac{y^2}{y^2-x^2}=1.$$

6. Příklad: Dělme lomené výrazy:

$$\frac{18a^2b^2}{5cd}:\frac{6ab^3}{5c^2d^4}=\frac{18a^2b^2}{5cd}\cdot\frac{5c^2d^4}{6ab^3}=\frac{3acd^3}{b}$$

$$\frac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2}:\frac{am^2-2amn+an^2}{3m+3n}=\frac{a(m^2-n^2)}{(m+n)^2}:\frac{a(m^2-2mn+n^2)}{3(m+n)}=$$

$$=\frac{a(m-n)(m+n)}{(m+n)^2}:\frac{a(m-n)^2}{3(m+n)}=\frac{a(m-n)(m+n)}{(m+n)^2}\cdot\frac{3(m+n)}{a(m-n)^2}=\frac{3}{m-n}.$$

Někdy je dělení racionálních lomených výrazů zapsáno pomocí zlomkové čáry – dostáváme tak složený lomený výraz. Pro jeho úpravu připomínáme vzorec

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}$$

7. Příklad:

$$\frac{1-\frac{x}{y}}{x-\frac{y^2}{x}}=\frac{\frac{y-x}{y}}{\frac{x^2-y^2}{x}}=\frac{y-x}{y}:\frac{x^2-y^2}{x}=\frac{y-x}{y}\cdot\frac{x}{x^2-y^2}=\frac{y-x}{y}\cdot\frac{x}{(x-y)(x+y)}=\frac{-x}{y(x+y)}$$

Neřešené úlohy:

Zkraťte lomené výrazy:

1) $\dfrac{72abx}{84aby}$

2) $\dfrac{3a(x+y)^2}{9a^2(x+y)}$

3) $\dfrac{10a^2b(x-y)^2}{15a^4b(x-y)^3}$

4) $\dfrac{3(a-b)(a-c)^2}{6(a-b)(a-c)}$

5) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{2a+2b}$

6) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$

7) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$

8) $\dfrac{a^4-b^4}{a^2+b^2}$

9) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+x-12}$

10) $\dfrac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}$

Sečtěte, odečtěte:

11) $\dfrac{4a-5b}{12}-\dfrac{3a-2b}{18}$

12) $a-\dfrac{a^2-b^2}{a}$

13) $a+b-\dfrac{a^2-b^2}{a}$

14) $\dfrac{2x-y}{x^2+xy}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+y}$

15) $\dfrac{2x}{x+y}+\dfrac{3y}{x-y}-\dfrac{2x^2+3y^2}{x^2-y^2}$

16) $\dfrac{a+b}{(a-b)^2}+\dfrac{a-b}{(a+b)^2}-\dfrac{2a}{a^2-b^2}$

17) $\dfrac{5}{2x^2+6x}-\dfrac{4-3x^2}{x^2-9}-3$

18) $\dfrac{2a-1}{2a}-\dfrac{2a}{2a-1}-\dfrac{1}{2a-4a^2}$

19) $\dfrac{1}{6x-4y}-\dfrac{1}{6x+4y}-\dfrac{3x}{4y^2-9a^2}$

20) $\dfrac{3x+2}{x^2-2x+1}-\dfrac{6}{x^2-1}-\dfrac{3x-2}{x^2+2x+1}$

21) $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{3ab}{a^3-b^3}-\dfrac{b-a}{a^2+ab+b^2}$

22) $\dfrac{5x-9}{(x-1)(x-3)}+\dfrac{2(2x+1)}{(x-1)(x+2)}$

Násobte:

23) $\left(\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x}{x-1}\right)\cdot\left(x-\dfrac{3x}{x+1}\right)$

24) $\left(\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{a}{x+a}\right)\cdot\dfrac{x^2+2ax+a^2}{2a^2}$

25) $\left(1+\dfrac{a}{x}-\dfrac{a^2}{x^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{a}{x}\right)\cdot\dfrac{x^3}{a^3-x^3}$

26) $\left(x^2-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-1\right)$

27) $\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{2a}{a^2-1}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a}-1\right)$

28) $\left(\dfrac{b}{a^2-ab}+\dfrac{a}{b^2-ab}\right)\cdot\dfrac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}$

Dělte:

29) $\dfrac{c+d}{c-d}:\dfrac{c^2+cd}{2c^2-2d^2}$

30) $\dfrac{(x+y)^2}{xy-y^2}:\left[-\dfrac{xy+y^2}{(x-y)^2}\right]$

31) $\dfrac{a^4-x^4}{a^3-x^3}:\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$

32) $\left(1+\dfrac{x}{1-x}\right):\dfrac{1+x}{1-x}$

33) $(a^3-b^3):\left(a+\dfrac{b^2}{a+b}\right)$

34) $\left(\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{a}{x+a}\right):\left(\dfrac{x+a}{a}-\dfrac{x-a}{x}\right)$

Zjednodušte

35) $\dfrac{\frac{1}{2r^3}}{3s^2}$ **36)** $\dfrac{\frac{3ux^4}{8vy^5}}{\frac{9u^4y}{20v^3x^3}}$ **37)** $\dfrac{1+\frac{y^2}{x^2}}{1-\frac{y^2}{x^2}}$ **38)** $\dfrac{1-\frac{a^2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}}$ **39)** $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$ **40)** $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^2}}$

Výsledky:

1) $\dfrac{6x}{7y}$ **2)** $\dfrac{x+y}{3a}$ **3)** $\dfrac{2}{3a^2(x-y)}$ **4)** $\dfrac{a-c}{2}$ **5)** $\dfrac{a+b}{2}$ **6)** $\dfrac{a-b}{a+b}$ **7)** $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

8) a^2-b^2 **9)** $\dfrac{x-3}{x+4}$ **10)** $\dfrac{x+y}{x-y}$ **11)** $\dfrac{6a-11b}{36}$ **12)** $\dfrac{b^2}{a}$ **13)** $\dfrac{b(a+b)}{a}$ **14)** $\dfrac{-2y}{x^2+xy}$ **15)** $\dfrac{xy}{x^2-y^2}$

16) $\dfrac{8ab^2}{(a^2-b^2)^2}$ **17)** $\dfrac{51x-15}{2x(x^2-9)}$ **18)** $-\dfrac{1}{a}$ **19)** $\dfrac{1}{3x-2y}$ **20)** $\dfrac{10x^2+10}{(x^2-1)^2}$ **21)** $\dfrac{2a-2b}{a^2+ab+b^2}$

22) $\dfrac{9x^2-9x+24}{(x-1)(x+2)(x-3)}$ **23)** $\dfrac{x}{x^2-1}$ **24)** $\dfrac{x+a}{x-a}$ **25)** -1 **26)** $3-x^2$ **27)** $\dfrac{1}{a}$ **28)** $\dfrac{a+b}{b-a}$

29) $\dfrac{2(c+d)}{c}$ **30)** $\dfrac{y^2-x^2}{y^2}$ **31)** $\dfrac{(a-x)(a+x)^2}{a^2+ax+x^2}$ **32)** $\dfrac{1}{1+x}$ **33)** a^2-b^2 **34)** $\dfrac{ax}{x^2-a^2}$

35) $\dfrac{1}{6r^3s^2}$ **36)** $\dfrac{5v^2x^7}{6u^3y^6}$ **37** $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ **38)** $x+a$ **39)** $\dfrac{y+x}{y-x}$ **40)** x

3.3. Iracionální výrazy

Při práci s těmito výrazy se využívají poznatky o odmocninách s racionálními mocniteli a pravidla o počítání se zlomky. Při udávání podmínek, při nichž mají výrazy smysl, je třeba uvažovat opět nenulové jmenovatele a navíc nezápornost výrazu základů sudých odmocnin.

Usměrňování výrazů (odstranění odmocnin ze jmenovatele), využíváme především vzorce pro rozdíl druhých resp. třetích mocnin, event. součet třetích mocnin.

1. Příklad: Usměrněme výraz $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$: $(x\neq -y)$

Řešení: $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

2. Příklad: Usměrněme výraz $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$: $(x\neq -y)$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right]}=\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+\left(\sqrt[3]{y}\right)^3}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}$$

3. Příklad: Upravme

$$\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}=\frac{\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}}{\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}-\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}}=\frac{\frac{1+a+1-a}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}}}{\frac{1+a-(1-a)}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}}}=\frac{2}{1+a-1+a}=\frac{2}{2a}=\frac{1}{a}$$

$$-1<a<1; a\neq 0$$

4. Příklad: Upravme

$$\sqrt{\frac{a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}}=\left[\frac{ab^{\frac{1}{3}}}{\left(ab^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{ab^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{1-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{12}}=\sqrt[3]{a}\sqrt[12]{b}$$

$a\neq 0$; $b>0$;

Neřešené úlohy:

1) $\sqrt{\frac{x^3\cdot\sqrt{y}}{y\cdot\sqrt[3]{x}}}$

2) $\sqrt{\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{m}{n}}}$

3) $\sqrt[3]{\frac{a\sqrt{b}}{c}}:\sqrt{\frac{b\sqrt{c}}{a}}$

4) $1+\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

5) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

6) $\frac{a}{\sqrt{3}-1}+\frac{a}{\sqrt{3}+1}$

7) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

8) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-\frac{3+\sqrt{x}}{1-x}$

9) $\frac{5\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}$

10) $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}{x}\right)^{\frac{4}{3}}$

11) $\left[\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}a^{-2}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{5}}$

12) $\left(\frac{m^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{1}{2}}m^{-1}}\right)^{\frac{3}{4}}$

13) $\frac{\left(a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}}$

14) $\frac{\left(x^{\frac{2}{3}}y^{-1}z\right)^{-\frac{1}{3}}}{\left(x^{-1}y^{-\frac{3}{2}}z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}$

Výsledky:

1) $x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{1}{4}}$ **2)** $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{5}{6}}$ **3)** $a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{7}{12}}$ **4)** $\sqrt{3}$ **5)** 10 **6)** $a\sqrt{3}$ **7)** $\frac{2(a+b)}{a-b}$ **8)** $\frac{4x-2}{1-x}$

9) $\frac{9\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{3}$ **10)** $x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{8}{9}}$ **11)** $a^{\frac{11}{15}}$ **12)** $m^{\frac{8}{5}}$ **13)** $b^{-\frac{1}{6}}$ **14)** $x^{\frac{4}{9}}y^{\frac{4}{3}}z^{-\frac{2}{3}}$