Diferenciální rovnice – základní pojmy

Text pro Matematiku 2 na FCH VUT v Brně

Miroslav Kureš

Ústav matematiky FSI VUT v Brně

duben 2020

Obsah

Motivace

Například: rozpad izotopu uhlíku C^{14}:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -kx$$

s případnou podmínkou

$$x(0) = x_0.$$

Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které jsou proměnné, neznámá funkce a ve které jsou také derivace téro funkce.

Diferenciální rovnice

Pokud je proměnná jedna, hovoříme o *obyčejných diferenciálních rovnicích*. Proměnnou obvykle značíme x a neznámou funkci $y = y(x)$.
Příklady obyčejných diferenciálních rovnic (ODR) jsou:

- $y' = x$
- $y' = y$
- $y' = xy$
- $y'' = xyy'$
- $y'''y'' + \frac{x^2}{y+y'} = 7$

Diferenciální rovnice

Pokud je proměnných více, hovoříme o *parciálních diferenciálních rovnicích*. Například mohou být proměnné dvě, x a y. Hledanou funkcí pak je $z = z(x, y)$.
Příklady parciální diferenciální rovnice (PDR) je:

- $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$

Dále se ale zabýváme jen ODR.

Řád diferenciální rovnice

Řád ODR je řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

- $y' = xy$ je rovnice 1. řádu
- $y'' = xyy'$ je rovnice 2. řádu
- $y'''y'' + \frac{x^2}{y+y'} = 7$ je rovnice 3. řádu

Řešení diferenciální rovnice

Řešením ODR rozumíme funkci, která splňuje rovnici.
Například pro rovnici

$$y'' + y = 0$$

to jsou např. funkce $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 3\sin x + 4\cos x$, ...

Partikulární řešení diferenciální rovnice

Partikulárním řešením ODR rozumíme jedno konkrétní řešení. Například pro rovnici

$$y'' + y = 0$$

to může být funkce $y = \sin x$.

Obecné řešení ODR

Obecným řešením ODR n-tého řádu rozumíme n-parametrickou soustavu řešení, přičemž počet parametrů nelze snížit. Například pro rovnici

$$y'' + y = 0$$

<u>není</u> obecným řešením množina $y = (c_1 + c_2)\sin x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Obecným řešením zde je množina $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Obecné řešení ODR

Obecné řešení není zadáno jednoznačně. Pro rovnici

$$y'' + y = 0$$

je dle naší definice také

$$y = \frac{1}{c_1} \sin x + c_2 \cos x$$

obecným řešením, jde ale o jinou (menší) množinu než vyjadřuje řešení $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

Obecné řešení ODR

Pro rovnici

$$\left(y''\right)^2 + y^2 = 0$$

pak obecné řešení, které má záviset na 2 parametrech (přičemž počet parametrů nelze snížit!), vůbec neexistuje, protože jediným řešením rovnice je funkce

$$y = 0.$$

A pro rovnici

$$\left(y''\right)^2 + y^2 + 1 = 0$$

to bude jak?

Obecné a partikulární řešení ODR

Z obecného řešení můžeme dostat partikulární řešení pro nějaké konkrétní hodnoty parametrů. Zvolíme-li v obecném řešení

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

rovnice

$$y'' + y = 0$$

parametry $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, dostaneme partikulární řešení

$$y = 2 \sin x + 3 \cos x.$$

Obecné a partikulární řešení ODR

Často se vyskytuje úloha najít partikulární řešení z obecného pro nějaké podmínky. Tyto podmínky se nazývají buď *počáteční* nebo *okrajové*. Pokud pro rovnici

$$y'' + y = 0$$

požadujeme

$$y(0) = 0 \quad \text{a } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

můžeme dopočítat c_1 a c_2. Dosazením do obecného řešení máme:

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 && \text{to je vlastně } 0 = c_2 \\ 1 &= c_1 \sin \frac{\pi}{2} + c_2 \cos \frac{\pi}{2} && \text{to je vlastně } 1 = c_1 \end{aligned}$$

Obecné a partikulární řešení ODR

Partikulární řešení tedy je

$$y = \sin x.$$

Povšimněme si, že pro jinou dvojici podmínek nemusí vůbec partikulární řešení existovat (například pro $y(0) = 0$ a $y(\pi) = 1$) nebo jich může existovat více (například pro $y(0) = 0$ a $y(\pi) = 0$).

Výjimečné řešení ODR

Také se může stát, že rovnice má řešení, které nelze získat z obecného žádnou volbou parametrů.
Podívejme se na rovnici

$$y'^2 = \frac{1}{y^2} - 1.$$

Ta má obecné řešení

$$(x + c)^2 + y^2 = 1. \tag{1}$$

Zatím ho neumíme spočítat. Jde o kružnice; nadvakrát bychom je mohli vyjádřit jako polokružnice, tím bychom měli explicitní vyjádření těchto křivek, pak se dosazením přesvědčíme, že jde o řešení.

Výjimečné řešení ODR

Všimněme si ale, že také funkce

$$y = 1 \quad \text{a} \quad y = -1$$

jsou řešením této rovnice! Žádnou volbou c je ale nedostaneme, jde o výjimečná (singulární) řešení.

K promyšlení *

Rozmyslete, jak to je s obecným řešením rovnice

$$\left(y' - y\right)\left(y' - 1\right) = 0$$

a případně s řešeními výjimečnými.

ODR1

Obecný tvar ODR1 je

$$F(x, y, y') = 0,$$

je-li ODR1 ve tvaru

$$y' = f(x, y),$$

říkáme, že je *rozřešená vzhledem k derivaci*.

Počáteční úloha ODR1

Často pak řešíme úlohu

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0;$$

například

$$y' = y \qquad y(0) = 2.$$

Podmínka $y(x_0) = y_0$ se nazývá *počáteční podmínka* a tato úloha *počáteční úloha*.

Počáteční úloha ODR1

Partikulárním řešením naší počáteční úlohy

$$y' = y \qquad y(0) = 2$$

je funkce

$$y = 2\,\mathrm{e}^x\,.$$

Budeme studovat metody, jak k tomuto řešení dospět. Lze to metodami analytickými. Metodami numerickými lze k řešení dospět pouze přibližně.

Počáteční úloha ODR1 – Eulerova metoda

Zvolme krok h. Pro nás, pro jednoduchost, nechť $h = 1$.
Počáteční podmínka $y(0) = 2$ znamená, že výchozím bodem našeho přibližného řešení je bod $[0, 2]$. Rovnice $y' = y$ pak říká, že derivace v tomto bodě je 2. Vezměme tedy přímku se směrnicí 2 procházející bodem $[0, 2]$ a posuňme se o krok. Dostáváme se do bodu $[1, 4]$.
A znovu: rovnice $y' = y$ udává, že derivace v tomto bodě je 4. Vezmeme přímku se směrnicí 4 procházející bodem $[1, 4]$ a znovu se posuneme o h. Dostáváme se do bodu $[2, 8]$. Atd.

Počáteční úloha ODR1 – existence řešení

Uvažujme

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0;$$

je-li $f(x, y)$ spojitá na okolí bodu $[x_0, y_0]$, pak existuje řešení počáteční úlohy, které je spojité na nějakém okolí x_0.

Počáteční úloha ODR1 – existence řešení

Uvažujme

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0;$$

má-li $f(x, y)$ na okolí bodu $[x_0, y_0]$ ohraničenou parciální derivaci $f'_y(x, y)$, pak existuje jediné řešení počáteční úlohy, které je spojité na nějakém okolí x_0.

Příklad

- Rozhodněte o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy

$$y' = -2\sqrt{y^3} \qquad y(1) = 1.$$

- Funkce $f(x, y) = -2\sqrt{y^3}$ je spojitá na okolí bodu $[1, 1]$. Řešení tedy existuje.
- Funkce $f'_y(x, y) = -\frac{3y^2}{\sqrt{y^3}}$ je v okolí bodu $[1, 1]$ ohraničená! Řešení je tedy jednoznačné.

Příklad

- Rozhodněte o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy
$$y' = -2\sqrt{y^3} \qquad y(1) = 1.$$
- Funkce $f(x, y) = -2\sqrt{y^3}$ je spojitá na okolí bodu $[1, 1]$. Řešení tedy existuje.
- Funkce $f'_y(x, y) = -\frac{3y^2}{\sqrt{y^3}}$ je v okolí bodu $[1, 1]$ ohraničená! Řešení je tedy jednoznačné.

Příklad

- Rozhodněte o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy
$$y' = -2\sqrt{y^3} \qquad y(1) = 1.$$
- Funkce $f(x, y) = -2\sqrt{y^3}$ je spojitá na okolí bodu $[1, 1]$. Řešení tedy existuje.
- Funkce $f'_y(x, y) = -\frac{3y^2}{\sqrt{y^3}}$ je v okolí bodu $[1, 1]$ ohraničená! Řešení je tedy jednoznačné.