

Gibejská bitva

Miroslav Kureš

17. září 2021

Gibejská bitva. (*Biblická bitva z 20. kapitoly knihy Soudců byla poprvé modelována diferenciálními rovnicemi Israelem Davidem v roce 1995.*)

1 Davidův model

Bitvě u Gibeje předcházelo brutální znásilnění levitovy konkubíny hordou gibejských mužů z kmene Benjaminců a její následná smrt. (Kniha Soudců, kapitola 19.) Izraelci poté vytáhli Benjamince exemplárně potrestat a došlo k třídenní bitvě. Pro tuto bitvu byl vytvořen následující matematický model.

Na obou stranách byli bojovníci s mečem, šermíři. Benjaminci měli dále bojovníky s prakem, prakovníky. Z Bible vyčteme následující číselné údaje. (Předpokládá se, že prakovníci už poslední den nebojovali.)

	Izraelští šermíři	Benjaminští šermíři	Benjaminští prakovníci
začátek 1. dne	400000	26000	700
změna v 1. dni	<i>-22000</i>		
začátek 2. dne	378000		
změna v 2. dni	<i>-18000</i>		
začátek 3. dne	360000		L
změna v 3. dni		<i>-25100</i>	<i>0</i>
konec 3. dne		600 - L	L

Cílem modelu je doplnit chybějící číselné hodnoty. První dva dny probíhala I. fáze bitvy, třetí den II. fáze (bez zapojení prakovníků). V I. fázi Izraelci utrpěli těžké ztráty, ve II. fázi se situace obrátila a Izraelci bitvu dotáhli ke svému vítězství. Označme:

$x(t)$ počet izraelských šermířů

$y_1(t)$ počet benjaminských šermířů

$y_2(t)$ počet benjaminských prakovníků

c_1^I četnost střetů mezi izraelskými šermíři a benjaminskými šermíři v I. fázi bitvy

c_2^I četnost střetů mezi izraelskými šermíři a benjaminskými prakovníky v I. fázi bitvy

c_1^{II} četnost střetů mezi izraelskými šermíři a benjaminskými šermíři v II. fázi bitvy

p_1^I pravděpodobnost úspěchu izraelského šermíře v souboji muž proti muži proti benjaminskému šermíři v I. fázi bitvy

p_2^I pravděpodobnost úspěchu izraelského šermíře v souboji muž proti muži proti benjaminskému prakovníkovi v I. fázi bitvy

p_1^{II} pravděpodobnost úspěchu izraelského šermíře v souboji muž proti muži proti benjaminskému šermíři v II. fázi bitvy

r počet bojovníků zabitých prakem

Hodnoty c_1 , c_2 a r se rozumí za jednotku času. Pak máme v I. fázi bitvy rovnice

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= - (1 - p_1^I) c_1^I - (1 - p_2^I) c_2^I - r y_2(t) \\ \frac{dy_1}{dt} &= -p_1^I c_1^I \\ \frac{dy_2}{dt} &= -p_2^I c_2^I\end{aligned}$$

a v II. fázi bitvy

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= - (1 - p_1^{II}) c_1^{II} \\ \frac{dy_1}{dt} &= -p_1^{II} c_1^{II} \\ \frac{dy_2}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Řešení těchto soustav je triviální. Pro I. fázi bitvy je

$$\begin{aligned}x(t) &= 400000 - (700r + (1 - p_1^I) c_1^I + (1 - p_2^I) c_2^I) t + r p_2^I c_2^I \frac{t^2}{2} \\ y_1(t) &= 26000 - p_1^I c_1^I t \\ y_2(t) &= 700 - p_2^I c_2^I t\end{aligned}$$

Dalším předpokladem, který David nyní použije, je $p_2^I = 1$. To pak dává

$$\begin{aligned}x(t) &= 400000 - (700r + (1 - p_1^I) c_1^I) t + r c_2^I \frac{t^2}{2} \\ y_1(t) &= 26000 - p_1^I c_1^I t \\ y_2(t) &= 700 - c_2^I t\end{aligned}$$

Pro $t = 1$ máme

$$\begin{aligned} 378000 = x(1) &= 400000 - 700r - (1 - p_1^I) c_1^I + \frac{1}{2} r c_2^I \\ y_1(1) &= 26000 - p_1^I c_1^I \\ y_2(1) &= 700 - c_2^I \end{aligned}$$

a pro $t = 2$ máme

$$\begin{aligned} 360000 = x(2) &= 400000 - 1400r - 2(1 - p_1^I) c_1^I + 2r c_2^I \\ y_1(2) &= 26000 - 2p_1^I c_1^I \\ L = y_2(2) &= 700 - 2c_2^I. \end{aligned}$$

Nyní je zřejmé, že určení počtu L už určí všechny ostatní hodnot. Zde lze experimentovat, David navrhuje $L = 200$.

Pak $c_2^I = 250$ a máme

$$\begin{aligned} -22000 &= -700r - (1 - p_1^I) c_1^I + 125r \\ y_1(1) &= 26000 - p_1^I c_1^I \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} -40000 &= -1400r - 2(1 - p_1^I) c_1^I + 500r \\ y_1(2) &= 26000 - 2p_1^I c_1^I. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic odvodíme, že $r = 16$ a dále, že

$$12800 = (1 - p_1^I) c_1^I.$$

Dále z dat vyplývá, že počet zabitých benjaminských šermířů a prakovníků dohromady po prvních dvou dnech byl $26700 - 25100 - 600 = 1000$. Při hodnotě $L = 200$ tedy je

$$25500 = y_1(2) = 26000 - 2p_1^I c_1^I$$

a odtud

$$250 = p_1^I c_1^I.$$

To už umožňuje spočítat $c_1^I = 13050$ a $p_1^I = \frac{5}{261} \approx 0,019$.

Nyní můžeme přistoupit k II. fázi. Řešení soustavy diferenciálních rovnic pro II. fázi bitvy je

$$\begin{aligned} x(t) &= 360000 - ((1 - p_1^{II}) c_1^{II}) t \\ y_1(t) &= 25500 - p_1^{II} c_1^{II} t \\ y_2(t) &= 200 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} x(1) &= 360000 - (1 - p_1^{II}) c_1^{II} \\ 400 = y_1(1) &= 25500 - p_1^{II} c_1^{II} \end{aligned}$$

a pro užití druhé rovnice $25100 = p_1^{II} c_1^{II}$ musíme nějak odhadnout ještě parametr. David to už neřeší. Situace se obrátila, vezměme tedy $p_1^{II} = 1 - p_1^I = \frac{256}{261} \approx 0,981$. Pak $c_1^{II} \approx 25590$.

Co není ještě dořešeno, je rozdělení ztrát prakovníků mezi první a druhý den. Řekněme, že byly stejné.

Doplněná tabulka pak je:

	Izraelští šermíři	Benjaminští šermíři	Benjaminští prakovníci
začátek 1. dne	400000	26000	700
změna v 1. dni	-22000	-250	-250
začátek 2. dne	378000	25750	450
změna v 2. dni	-18000	-250	-250
začátek 3. dne	360000	25500	200
změna v 3. dni	-490	-25100	0
konec 3. dne	359510	400	200

2 Závěrečné poznámky

Modelování Gibejské bitvy je aplikací Lanchesterova modelu z roku 1916. Israel David užil několika předpokladů (např. $L = 200$ vychází mj. z toho, že prakovnické „řemeslo“ bylo dále předáváno, přičemž, jakož i jinde, se autor odvolává na další pasáže z Bible). Jistě je možné tyto předpoklady rozvolnit a dále modelovat. Modelu se věnuje několik dalších publikací. Například Daisy, M. H. Huang, Chih-Young Hung, Titus Tang, Gino Yang, Hsiao-Jung Chen a Peter Chu ve svém článku z roku 2004 diskutují, kolik Izraelců bylo zabito prakovníky v prvním dnu bitvy a kolik v druhém dnu, s ohledem na jejich klesající počet; následně, kolik zabitých Izraelců pak připadá na benjamínské šermíře.