Poznámka ke Goldbachově-Eulerově větě

Miroslav Kureš

20. března 2022

I. Goldbachova-Eulerova věta.

Christian Goldbach (1690-1764), známý především pro dosud nedokázanou hypotézu, že každé sudé číslo větší než 2 je součtem dvou prvočísel, v dopise, dnes ztraceném, který poslal Leonhardu Eulerovi, uvedl jiný velmi pěkný výsledek. Tento výsledek Euler v roce 1737 publikoval, autorství ovšem přiznal Goldbachovi. Dnes hovoříme o Goldbachově-Eulerově větě.

Uvažujme množinu A všech mocnin přirozených čísel (neuvažujeme první mocniny a mocniny jedničky). Tj.

$$A = \left\{n^k; n \geq 2, k \geq 2\right\} = \{4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, \dots\}.$$

Pak řada o jedničku zmenšených převrácených hodnot čísel z množiny A

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} + \dots$$

konverguje k 1.

Důkaz uváděný Eulerem není zcela korektní. Euler mj. pracuje s veličinou x jako součtem harmonické řady $x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$, která ale diverguje. Zajímavý způsob, jak původní ideu zachovat a nedostatek překlenout, nabízí nestandardní analýza s užitím infinitních čísel, viz [1].

II. Shallitova-Zikanova věta.

Jiné vyjádření tohoto pěkného a dnes už vpravdě klasického výsledku poskytli v roce 1986 J. D. Shallit a K. Zikan[1]. Toto vyjádření bylo po-

[1]jedná se o syna známého brněnského šachisty Karla Zikana (1932-2021); Karel Zikan mladší je uváděn jako vynikající student matematiky na San José State University, který obdržel za své mimořádné výsledky v roce 1982 Hoggattovu cenu a dále Fullerovo stipendium; v roce 1990 obhájil PhD v operačním výzkumu na univerzitě ve Stanfordu a stal se profesorem Fulbrightova programu; v jeho rámci později působil i v Brně

jmenováno Shallitova-Zikanova věta a je poměrně široce citováno[2]. Jistou zajímavostí je, že publikace [2] J. D. Shallita a K. Zikana vůbec není standardním matematickým článkem, ale oznámením řešení úlohy zadané v jednom z předchozích čísel časopisu Monthly, kterého se autoři, ještě jako studenti, ujali. Věta nesoucí jejich jména je tam uvedena toliko slovy „*Several solvers*[3] *noted that the result can also be expressed as*“ a je napsán vzorec. Nyní ho též uvedeme.

$$\sum_{k\geq 2} (\zeta(k)-1) = 1,$$

kde ζ je Riemannova zeta[4] funkce $\zeta(k) = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \dots$. Jde spíše o nový výsledek než o reformulaci Goldbachovy-Eulerovy věty.

III. Důkaz.

Bylo by nespravedlivé říci, že Shallit a Zikan neuvádějí důkaz svého tvrzení. Jen je v textu jaksi schován a shledáváme vhodným jej mírně – spíše zvýraznit, než doplnit. Goldbachova-Eulerova věta je dokázána takto. Označme B množinu všech přirozených čísel větších než 1 nepatřících do A. Pak

$$\begin{aligned}\sum_{a\in A}\frac{1}{a-1} &= \sum_{k\geq 2}\sum_{b\in B}\frac{1}{b^k-1}\\ &= \sum_{k\geq 2}\sum_{b\in B}\sum_{j\geq 1}\frac{1}{b^{jk}}\\ &= \sum_{n\geq 2}\sum_{k\geq 2}\frac{1}{n^k}\\ &= \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\,(n-1)} = 1,\end{aligned}$$

přičemž poslední rovnost je známý součet teleskopické řady, který poprvé odvodil Evangelista Torricelli v roce 1644.

[2] 23 přímých citací podle Google Scholar k 20. 2. 2022

[3] skutečný objevitel věty tudíž patrně zůstane zapomenut

[4] známý Basilejský problém dal odpověď $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ a dále v roce 1979 Roger Apéry dokázal iracionalitu čísla $\zeta(3)$

Z druhé strany, upravujeme

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 2}(\zeta(k)-1) &= \sum_{k\geq 2}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^k}\\ &= \sum_{n\geq 2}\sum_{k\geq 2}\frac{1}{n^k}\end{aligned}$$

a v tuto chvíli se již výrazy navzájem setkaly. □

Reference

[1] Bibiloni, Lluís, Pelegrí Viader a Jaume Paradís, *On a series of Goldbach and Euler*, The American Mathematical Monthly 113 (2006): 206–220.

[2] Shallit, J. D. a K. Zikan, *A theorem of Goldbach*, The American Mathematical Monthly 93 (1986): 402-403.