Lokální extrémy funkcí dvou proměnných

Text pro Matematiku 2 na FCH VUT v Brně

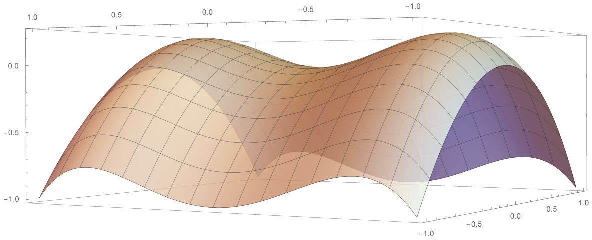
Miroslav Kureš

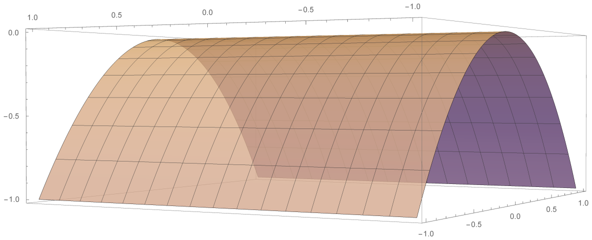
Ústav matematiky FSI VUT v Brně

Obsah

1. Co to jsou lokální extrémy?
2. Proč potřebujeme zjistit lokální extrémy?
   - Metoda nejmenších čtverců
   - Stavová rovnice
   - Maximalizace zisku firmy
3. Jak lokální extrémy nalézt?
4. Příklady
   - Příklad 1: $f(x, y) = 2x^2y + 5x - \frac{x}{y^2}$
   - Příklad 2: $f(x, y) = 3x^2 - 18x + \operatorname{arctan}\left(2xy^2\right)$
   - Příklad 3: $f(x, y) = (2x - y)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$
   - Příklad 4: $f(x, y) = 5x^2 - \sqrt{2}xy + 5x + \frac{5}{16}\ln\left(x^3y\right)$

Názorně


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0.0
−0.5
−1.0
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0.0
−0.5
−1.0
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0

Definice

- Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě A *ostré lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}$ bodu A takové, že pro každý bod $X \in \mathcal{O}$, $X \neq A$, je splněno
$$f(X) - f(A) > 0.$$
- Modifikace: … *ostré lokální maximum* … $f(X) - f(A) < 0$.
- Modifikace: … *neostré lokální minimum* … $f(X) - f(A) \geq 0$.
- Modifikace: … *neostré lokální maximum* … $f(X) - f(A) \leq 0$.

Definice

- Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě A *ostré lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}$ bodu A takové, že pro každý bod $X \in \mathcal{O}$, $X \neq A$, je splněno

$$f(X) - f(A) > 0.$$

- Modifikace: … *ostré lokální maximum* … $f(X) - f(A) < 0$.
- Modifikace: … *neostré lokální minimum* … $f(X) - f(A) \geq 0$.
- Modifikace: … *neostré lokální maximum* … $f(X) - f(A) \leq 0$.

Definice

- Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě A *ostré lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}$ bodu A takové, že pro každý bod $X \in \mathcal{O}$, $X \neq A$, je splněno

$$f(X) - f(A) > 0.$$

- Modifikace: …*ostré lokální maximum* … $f(X) - f(A) < 0$.
- Modifikace: …*neostré lokální minimum* … $f(X) - f(A) \geq 0$.
- Modifikace: …*neostré lokální maximum* … $f(X) - f(A) \leq 0$.

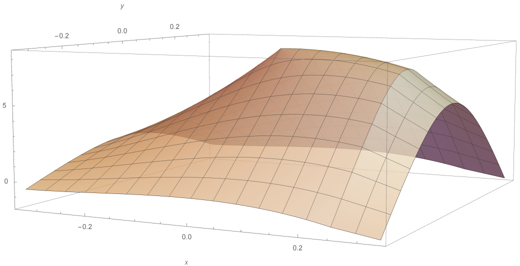
Definice

- Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě A *ostré lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}$ bodu A takové, že pro každý bod $X \in \mathcal{O}$, $X \neq A$, je splněno

$$f(X) - f(A) > 0.$$

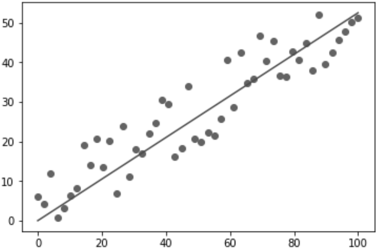
- Modifikace: … *ostré lokální maximum* … $f(X) - f(A) < 0$.
- Modifikace: … *neostré lokální minimum* … $f(X) - f(A) \geq 0$.
- Modifikace: … *neostré lokální maximum* … $f(X) - f(A) \leq 0$.

Neexistence derivací



Lokální minima a maxima (extrémy) mohou být v bodech, kde neexistuje jedna či druhá parciální derivace funkce nebo dokonce obě. Tedy v různých hrotech (např. kužel nebo plocha na obrázku). Dále se ale budeme zabývat případem, že první a druhé (případně i další) parciální derivace existují.

Metoda nejmenších čtverců: aproximace přímkou



$$S = (y_0 - (ax_0 + b))^2 + \cdots + (y_n - (ax_n + b))^2$$

S je funkcí a, b. Hledáme, pro jaká a, b nabývá $S(a, b)$ minimální hodnoty.

Rovnice ideálního plynu

$$P = \frac{NRT}{V}$$

P tlak (Pa $=$ Nm^{-2}), T teplota (K), V objem (m^3), N počet molů (mol), R molární plynová konstanta ($8,314$ JK^{-1}mol^{-1})
Nebo: $\overline{V} = \frac{V}{N}$ (molární objem). Pak

$$P = \frac{RT}{\overline{V}}$$

Dietericiho rovnice reálného plynu

(Conrad Heinrich Dieterici 1858-1929)

$$P = \frac{RT}{\overline{V} - b}\, \mathrm{e}^{-\frac{a}{R\overline{V}T}}$$

(a, b, tzv. atraktivní a repulzivní parametr, závisí na konkrétním plynu; a: interakce mezi molekulami b: velikost molekul)
Vezmeme-li nyní P jako funkci závisející na $\overline{V}$ a T, můžeme nalézt lokální extrémy $P(\overline{V}, T)$.

Z učebnice pro ekonomy (Mabbett, A. J., Work out mathematics for economists)

Kamenická rodinná firma Smith & Ray vyrábí dva typy náhrobních kamenů, jeden za 150 liber, druhý za 400 liber. Nákladová funkce je

$$TC = 2Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + 5Q_2^2 + 50$$

(Q_1, Q_2 množství). Chceme najít taková množství, aby zisk firmy byl maximální. Zisk spočteme jako $\Pi = TR - TC$, kde $TR = P_1Q_1 + P_2Q_2$ (P_1, P_2 ceny). Hledáme tedy extrém funkce

$$\Pi(Q_1, Q_2) = 150Q_1 + 400Q_2 - \left(2Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + 5Q_2^2 + 50\right).$$

Odvození

- Připomeňme: při lokálním minimu v A funkce f v blízkém bodě X splňuje $f(X) - f(A) > 0$. Bod $X = [x_1, x_2] = [a_1 + \varepsilon\Delta x, a_2 + \varepsilon\Delta y]$, kde $(\Delta x, \Delta y)$ je nenulový vektor.
- Taylor:

$$f(X) - f(A) = \varepsilon\left(f'_x(A)\Delta x + f'_y(A)\Delta y\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(f''_{xx}(A)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(A)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(A)(\Delta y)^2\right) + \dots$$

Odvození

- Připomeňme: při lokálním minimu v A funkce f v blízkém bodě X splňuje $f(X) - f(A) > 0$. Bod $X = [x_1, x_2] = [a_1 + \varepsilon\Delta x, a_2 + \varepsilon\Delta y]$, kde $(\Delta x, \Delta y)$ je nenulový vektor.
- Taylor:

$$f(X) - f(A) = \varepsilon\left(f'_x(A)\Delta x + f'_y(A)\Delta y\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(f''_{xx}(A)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(A)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(A)(\Delta y)^2\right) + \dots$$

Odvození

- Ve výrazu na pravé straně poznáváme (pro $\varepsilon \to 0$) diferenciály!
- Uvědomme si: pro minimum potřebujeme na levé straně (tedy i na pravé) kladnou hodnotu. Přitom ε může být jak kladné, tak záporné. To znamená:
- První diferenciál musí být nutně nulový! (Tedy první parciální derivace musí být nulové.)
- Pokud bude první diferenciál nulový a druhý diferenciál kladný, pak už je minimum zaručeno. (Místo „kladný" říkáme pozitivně definitiní.)

Odvození

- Ve výrazu na pravé straně poznáváme (pro $\varepsilon \to 0$) diferenciály!
- Uvědomme si: pro minimum potřebujeme na levé straně (tedy i na pravé) kladnou hodnotu. Přitom ε může být jak kladné, tak záporné. To znamená:
- První diferenciál musí být nutně nulový! (Tedy první parciální derivace musí být nulové.)
- Pokud bude první diferenciál nulový a druhý diferenciál kladný, pak už je minimum zaručeno. (Místo „kladný" říkáme pozitivně definitiní.)

Odvození

- Ve výrazu na pravé straně poznáváme (pro $\varepsilon \to 0$) diferenciály!
- Uvědomme si: pro minimum potřebujeme na levé straně (tedy i na pravé) kladnou hodnotu. Přitom ε může být jak kladné, tak záporné. To znamená:
- První diferenciál musí být nutně nulový! (Tedy první parciální derivace musí být nulové.)
- Pokud bude první diferenciál nulový a druhý diferenciál kladný, pak už je minimum zaručeno. (Místo „kladný" říkáme pozitivně definitiní.)

Odvození

- Ve výrazu na pravé straně poznáváme (pro $\varepsilon \to 0$) diferenciály!
- Uvědomme si: pro minimum potřebujeme na levé straně (tedy i na pravé) kladnou hodnotu. Přitom ε může být jak kladné, tak záporné. To znamená:
- První diferenciál musí být nutně nulový! (Tedy první parciální derivace musí být nulové.)
- Pokud bude první diferenciál nulový a druhý diferenciál kladný, pak už je minimum zaručeno. (Místo „kladný" říkáme pozitivně definitiní.)

Nulový první diferenciál

Nutnou podmínkou k tomu, aby v bodě A byl lokální extrém, je, aby $f'_x(A) = 0$ a $f'_y(A) = 0$. Body, v nichž jsou první parciální derivace nulové, nazýváme *stacionární body*.

Druhý diferenciál

- $$d^2 f_A = \left(f''_{xx}(A)(dx)^2 + 2f''_{xy}(A)\,dx\,dy + f''_{yy}(A)(dy)^2 \right)$$

  Je-li druhý diferenciál pro každý nenulový vektor (dx, dy) kladný, nazveme ho *pozitivně definitní*.

- …záporný …*negativně definitní*
  …nezáporný …*pozitivně semidefinitní*
  …nekladný …*negativně semidefinitní*

- Je-li druhý diferenciál pro nějaký vektor (dx, dy) kladný a pro jiný věktor záporný, nazveme ho *indefinitní*.

Druhý diferenciál

- $$\mathrm{d}^2 f_A = \left(f''_{xx}(A)(\mathrm{d}x)^2 + 2f''_{xy}(A)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + f''_{yy}(A)(\mathrm{d}y)^2 \right)$$

  Je-li druhý diferenciál pro každý nenulový vektor $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ kladný, nazveme ho *pozitivně definitní*.
- …záporný …*negativně definitní*
  …nezáporný …*pozitivně semidefinitní*
  …nekladný …*negativně semidefinitní*
- Je-li druhý diferenciál pro nějaký vektor $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ kladný a pro jiný věktor záporný, nazveme ho *indefinitní*.

Druhý diferenciál

- $$d^2 f_A = \left(f''_{xx}(A)(dx)^2 + 2f''_{xy}(A)\,dx\,dy + f''_{yy}(A)(dy)^2 \right)$$

  Je-li druhý diferenciál pro každý nenulový vektor (dx, dy) kladný, nazveme ho *pozitivně definitní*.
- …záporný …*negativně definitní*
  …nezáporný …*pozitivně semidefinitní*
  …nekladný …*negativně semidefinitní*
- Je-li druhý diferenciál pro nějaký vektor (dx, dy) kladný a pro jiný věktor záporný, nazveme ho *indefinitní*.

Hessova matice

- Matice druhého diferenciálu, který je příkladem tzv. kvadratické formy, je matice složená z druhých parciálních derivací
$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{xy}(A) & f''_{yy}(A) \end{pmatrix}$$
do nichž jsme dosadili zkoumaný stacionární bod A. Matici se říká *Hessova matice* (Ludwig Otto Hesse 1811-1874).
- Označme $D_1 = f''_{xx}(A)$, $D_2 = f''_{xx}(A) f''_{yy}(A) - \left(f''_{xy}(A)\right)^2$ (determinant podmatice 1. řádu v levém horním rohu a determinant celé matice).

Hessova matice

- Matice druhého diferenciálu, který je příkladem tzv. kvadratické formy, je matice složená z druhých parciálních derivací
$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{xy}(A) & f''_{yy}(A) \end{pmatrix}$$
do nichž jsme dosadili zkoumaný stacionární bod A. Matici se říká *Hessova matice* (Ludwig Otto Hesse 1811-1874).
- Označme $D_1 = f''_{xx}(A)$, $D_2 = f''_{xx}(A)f''_{yy}(A) - \left(f''_{xy}(A)\right)^2$ (determinant podmatice 1. řádu v levém horním rohu a determinant celé matice).

Sylvesterovo kritérium

- Druhý diferenciál je pozitivně definitní právě tehdy, když v bodě A nastává $D_1 > 0$ a $D_2 > 0$.
- Druhý diferenciál je negativně definitní právě tehdy, když v bodě A nastává $D_1 < 0$ a $D_2 > 0$.
- Tzv. Sylvesterovo kritérium (James Joseph Sylvester 1814-1897).
- Dále: Je-li druhý diferenciál ve stacionárním bodě pozitivně (negativně) definitní, je v tomto bodě lokální minimum (maximum).

Sylvesterovo kritérium

- Druhý diferenciál je pozitivně definitní právě tehdy, když v bodě A nastává $D_1 > 0$ a $D_2 > 0$.
- Druhý diferenciál je negativně definitní právě tehdy, když v bodě A nastává $D_1 < 0$ a $D_2 > 0$.
- Tzv. Sylvesterovo kritérium (James Joseph Sylvester 1814-1897).
- Dále: Je-li druhý diferenciál ve stacionárním bodě pozitivně (negativně) definitní, je v tomto bodě lokální minimum (maximum).

Sylvesterovo kritérium

- Druhý diferenciál je pozitivně definitní právě tehdy, když v bodě A nastává $D_1 > 0$ a $D_2 > 0$.
- Druhý diferenciál je negativně definitní právě tehdy, když v bodě A nastává $D_1 < 0$ a $D_2 > 0$.
- Tzv. Sylvesterovo kritérium (James Joseph Sylvester 1814-1897).
- Dále: Je-li druhý diferenciál ve stacionárním bodě pozitivně (negativně) definitní, je v tomto bodě lokální minimum (maximum).

Sylvesterovo kritérium

- Druhý diferenciál je pozitivně definitní právě tehdy, když v bodě A nastává $D_1 > 0$ a $D_2 > 0$.
- Druhý diferenciál je negativně definitní právě tehdy, když v bodě A nastává $D_1 < 0$ a $D_2 > 0$.
- Tzv. Sylvesterovo kritérium (James Joseph Sylvester 1814-1897).
- Dále: Je-li druhý diferenciál ve stacionárním bodě pozitivně (negativně) definitní, je v tomto bodě lokální minimum (maximum).

Další kritéria extrému *

- A naopak: jestliže je ve stacionárním bodě neostré lokální minimum (maximum), pak je druhý diferenciál ve stacionárním bodě pozitivně (negativně) semidefinitní.
- Z toho plyne: pro $D_2 < 0$ lokální extrém nikdy nenastává!
- Z toho dále plyne: je-li $D_1 \neq 0$ a $D_2 = f''_{xx}(A) f''_{yy}(A) - \left(f''_{xy}(A)\right)^2 = 0$, pak nutně mají $f''_{xx}(A)$ a $f''_{yy}(A)$ stejná znaménka.
- A také je zřejmé: je-li pro nenulovou Hessovu matici $D_1 = 0$ a $D_2 = 0$, pak je derivace $f''_{yy}(A)$ nenulová.
- Kritérium pro $D_2 = 0$: Je-li $f''_{yy}(A) \geq 0$ (≤ 0), pak je druhý diferenciál v A pozitivně (negativně) semidefinitní.

Další kritéria extrému *

- A naopak: jestliže je ve stacionárním bodě neostré lokální minimum (maximum), pak je druhý diferenciál ve stacionárním bodě pozitivně (negativně) semidefinitní.
- Z toho plyne: pro $D_2 < 0$ lokální extrém nikdy nenastává!
- Z toho dále plyne: je-li $D_1 \neq 0$ a $D_2 = f''_{xx}(A)f''_{yy}(A) - \left(f''_{xy}(A)\right)^2 = 0$, pak nutně mají $f''_{xx}(A)$ a $f''_{yy}(A)$ stejná znaménka.
- A také je zřejmé: je-li pro nenulovou Hessovu matici $D_1 = 0$ a $D_2 = 0$, pak je derivace $f''_{yy}(A)$ nenulová.
- Kritérium pro $D_2 = 0$: Je-li $f''_{yy}(A) \geq 0$ (≤ 0), pak je druhý diferenciál v A pozitivně (negativně) semidefinitní.

Další kritéria extrému *

- A naopak: jestliže je ve stacionárním bodě neostré lokální minimum (maximum), pak je druhý diferenciál ve stacionárním bodě pozitivně (negativně) semidefinitní.
- Z toho plyne: pro $D_2 < 0$ lokální extrém nikdy nenastává!
- Z toho dále plyne: je-li $D_1 \neq 0$ a $D_2 = f''_{xx}(A) f''_{yy}(A) - \left(f''_{xy}(A)\right)^2 = 0$, pak nutně mají $f''_{xx}(A)$ a $f''_{yy}(A)$ stejná znaménka.
- A také je zřejmé: je-li pro nenulovou Hessovu matici $D_1 = 0$ a $D_2 = 0$, pak je derivace $f''_{yy}(A)$ nenulová.
- Kritérium pro $D_2 = 0$: Je-li $f''_{yy}(A) \geq 0$ (≤ 0), pak je druhý diferenciál v A pozitivně (negativně) semidefinitní.

Další kritéria extrému *

- A naopak: jestliže je ve stacionárním bodě neostré lokální minimum (maximum), pak je druhý diferenciál ve stacionárním bodě pozitivně (negativně) semidefinitní.
- Z toho plyne: pro $D_2 < 0$ lokální extrém nikdy nenastává!
- Z toho dále plyne: je-li $D_1 \neq 0$ a $D_2 = f''_{xx}(A)f''_{yy}(A) - \left(f''_{xy}(A)\right)^2 = 0$, pak nutně mají $f''_{xx}(A)$ a $f''_{yy}(A)$ stejná znaménka.
- A také je zřejmé: je-li pro nenulovou Hessovu matici $D_1 = 0$ a $D_2 = 0$, pak je derivace $f''_{yy}(A)$ nenulová.
- Kritérium pro $D_2 = 0$: Je-li $f''_{yy}(A) \geq 0$ (≤ 0), pak je druhý diferenciál v A pozitivně (negativně) semidefinitní.

Další kritéria extrému *

- A naopak: jestliže je ve stacionárním bodě neostré lokální minimum (maximum), pak je druhý diferenciál ve stacionárním bodě pozitivně (negativně) semidefinitní.
- Z toho plyne: pro $D_2 < 0$ lokální extrém nikdy nenastává!
- Z toho dále plyne: je-li $D_1 \neq 0$ a $D_2 = f''_{xx}(A)f''_{yy}(A) - \left(f''_{xy}(A)\right)^2 = 0$, pak nutně mají $f''_{xx}(A)$ a $f''_{yy}(A)$ stejná znaménka.
- A také je zřejmé: je-li pro nenulovou Hessovu matici $D_1 = 0$ a $D_2 = 0$, pak je derivace $f''_{yy}(A)$ nenulová.
- Kritérium pro $D_2 = 0$: Je-li $f''_{yy}(A) \geq 0$ (≤ 0), pak je druhý diferenciál v A pozitivně (negativně) semidefinitní.

Příklad 1

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x,y) = 2x^2y + 5x - \frac{x}{y^2}$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
- $$f'_x = 4xy + 5 - \frac{1}{y^2} \qquad f'_y = 2x^2 + 2\frac{x}{y^3}$$
- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 1

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x,y) = 2x^2y + 5x - \frac{x}{y^2}$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
-

$$f'_x = 4xy + 5 - \frac{1}{y^2} \qquad f'_y = 2x^2 + 2\frac{x}{y^3}$$

- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 1

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x,y) = 2x^2y + 5x - \frac{x}{y^2}$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
-

$$f'_x = 4xy + 5 - \frac{1}{y^2} \qquad f'_y = 2x^2 + 2\frac{x}{y^3}$$

- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 1

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x,y) = 2x^2y + 5x - \frac{x}{y^2}$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
-

$$f'_x = 4xy + 5 - \frac{1}{y^2} \qquad f'_y = 2x^2 + 2\frac{x}{y^3}$$

- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 1

- V druhé rovnici: vydělte 2 a vytkněte x.
- $$x\left(x + \frac{1}{y^3}\right) = 0$$

  Tzn. buď $x = 0$ nebo $x = -\frac{1}{y^3}$. Obě varianty dosaďte postupně do první rovnice.
- Ve variantě (a) máte

  $$5 - \frac{1}{y^2} = 0$$

  a ve variantě (b) dostanete

  $$-\frac{4}{y^2} + 5 - \frac{1}{y^2} = 0.$$

Příklad 1

- V druhé rovnici: vydělte 2 a vytkněte x.
- $$x\left(x + \frac{1}{y^3}\right) = 0$$

  Tzn. buď $x = 0$ nebo $x = -\frac{1}{y^3}$. Obě varianty dosaďte postupně do první rovnice.
- Ve variantě (a) máte

  $$5 - \frac{1}{y^2} = 0$$

  a ve variantě (b) dostanete

  $$-\frac{4}{y^2} + 5 - \frac{1}{y^2} = 0.$$

Příklad 1

- V druhé rovnici: vydělte 2 a vytkněte x.
- $$x\left(x + \frac{1}{y^3}\right) = 0$$
  Tzn. buď $x = 0$ nebo $x = -\frac{1}{y^3}$. Obě varianty dosaďte postupně do první rovnice.
- Ve variantě (a) máte
  $$5 - \frac{1}{y^2} = 0$$
  a ve variantě (b) dostanete
  $$-\frac{4}{y^2} + 5 - \frac{1}{y^2} = 0.$$

Příklad 1

- V obou variantách dostanete pro y dvě řešení, ve variantě (b) ještě dopočtete x.
- Celkem dostanete čtyři stacionární body:

$$A = \left[0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right], \quad B = \left[0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right], \quad C = [-1, 1], \quad D = [1, -1].$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
- $$f''_{xx} = 4y \qquad f''_{xy} = 4x + \frac{2}{y^3} \qquad f''_{yy} = -\frac{6x}{y^4}$$

Příklad 1

- V obou variantách dostanete pro y dvě řešení, ve variantě (b) ještě dopočtete x.
- Celkem dostanete čtyři stacionární body:

$$A = \left[0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right], \quad B = \left[0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right], \quad C = [-1, 1], \quad D = [1, -1].$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
- $$f''_{xx} = 4y \qquad f''_{xy} = 4x + \frac{2}{y^3} \qquad f''_{yy} = -\frac{6x}{y^4}$$

Příklad 1

- V obou variantách dostanete pro y dvě řešení, ve variantě (b) ještě dopočtete x.
- Celkem dostanete čtyři stacionární body:

$$A = \left[0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right], \quad B = \left[0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right], \quad C = [-1, 1], \quad D = [1, -1].$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
- $$f''_{xx} = 4y \qquad f''_{xy} = 4x + \frac{2}{y^3} \qquad f''_{yy} = -\frac{6x}{y^4}$$

Příklad 1

- V obou variantách dostanete pro y dvě řešení, ve variantě (b) ještě dopočtete x.
- Celkem dostanete čtyři stacionární body:

$$A = \left[0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right], \quad B = \left[0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right], \quad C = [-1, 1], \quad D = [1, -1].$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
- $$f''_{xx} = 4y \qquad f''_{xy} = 4x + \frac{2}{y^3} \qquad f''_{yy} = -\frac{6x}{y^4}$$

Příklad 1

- Dosadíte-li bod A, dostanete:

$$f''_{xx}(A) = -\frac{4}{\sqrt{5}} \qquad f''_{xy}(A) = -10\sqrt{5} \qquad f''_{yy}(A) = 0$$

- Hessova matice pro bod A je $\begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{5}} & -10\sqrt{5} \\ -10\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$, $D_2 = -500$.
- Protože je D_2 záporný, není v bodě A lokální extrém.

Příklad 1

- Dosadíte-li bod A, dostanete:

$$f''_{xx}(A) = -\frac{4}{\sqrt{5}} \qquad f''_{xy}(A) = -10\sqrt{5} \qquad f''_{yy}(A) = 0$$

- Hessova matice pro bod A je $\begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{5}} & -10\sqrt{5} \\ -10\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$, $D_2 = -500$.
- Protože je D_2 záporný, není v bodě A lokální extrém.

Příklad 1

- Dosadíte-li bod A, dostanete:

$$f''_{xx}(A) = -\frac{4}{\sqrt{5}} \qquad f''_{xy}(A) = -10\sqrt{5} \qquad f''_{yy}(A) = 0$$

- Hessova matice pro bod A je $\begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{5}} & -10\sqrt{5} \\ -10\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$, $D_2 = -500$.
- Protože je D_2 záporný, není v bodě A lokální extrém.

Příklad 1

- Dosadíte-li bod B, dostanete:

$$f''_{xx}(B) = \frac{4}{\sqrt{5}} \qquad f''_{xy}(B) = 10\sqrt{5} \qquad f''_{yy}(B) = 0$$

- Hessova matice pro bod B je $\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} & 10\sqrt{5} \\ 10\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $D_2 = -500$.
- Protože je D_2 záporný, není v bodě B lokální extrém.

Příklad 1

- Dosadíte-li bod B, dostanete:

$$f''_{xx}(B) = \frac{4}{\sqrt{5}} \qquad f''_{xy}(B) = 10\sqrt{5} \qquad f''_{yy}(B) = 0$$

- Hessova matice pro bod B je $\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} & 10\sqrt{5} \\ 10\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $D_2 = -500$.
- Protože je D_2 záporný, není v bodě B lokální extrém.

Příklad 1

- Dosadíte-li bod B, dostanete:

$$f''_{xx}(B) = \frac{4}{\sqrt{5}} \qquad f''_{xy}(B) = 10\sqrt{5} \qquad f''_{yy}(B) = 0$$

- Hessova matice pro bod B je $\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} & 10\sqrt{5} \\ 10\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $D_2 = -500$.
- Protože je D_2 záporný, není v bodě B lokální extrém.

Příklad 1

- Dosadíte-li bod C, dostanete:

$$f''_{xx}(C) = 4 \qquad f''_{xy}(C) = -2 \qquad f''_{yy}(C) = 6$$

- Hessova matice pro bod C je $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = 4$, $D_2 = 20$.
- Protože je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, je v bodě C lokální minimum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto minima: $f(C) = -2$.

Příklad 1

- Dosadíte-li bod C, dostanete:

$$f''_{xx}(C) = 4 \qquad f''_{xy}(C) = -2 \qquad f''_{yy}(C) = 6$$

- Hessova matice pro bod C je $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = 4$, $D_2 = 20$.
- Protože je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, je v bodě C lokální minimum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto minima: $f(C) = -2$.

Příklad 1

- Dosadíte-li bod C, dostanete:

$$f''_{xx}(C) = 4 \qquad f''_{xy}(C) = -2 \qquad f''_{yy}(C) = 6$$

- Hessova matice pro bod C je $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = 4$, $D_2 = 20$.
- Protože je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, je v bodě C lokální minimum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto minima: $f(C) = -2$.

Příklad 1

- Dosadíte-li bod C, dostanete:

$$f''_{xx}(C) = 4 \qquad f''_{xy}(C) = -2 \qquad f''_{yy}(C) = 6$$

- Hessova matice pro bod C je $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = 4$, $D_2 = 20$.
- Protože je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, je v bodě C lokální minimum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto minima: $f(C) = -2$.

Příklad 1

- Dosadíte-li bod D, dostanete:

$$f''_{xx}(D) = -4 \qquad f''_{xy}(D) = 2 \qquad f''_{yy}(D) = -6$$

- Hessova matice pro bod C je $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = -4$, $D_2 = 20$.
- Protože je $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, je v bodě D lokální maximum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto maxima: $f(D) = 2$.

Příklad 1

- Dosadíte-li bod D, dostanete:

$$f''_{xx}(D) = -4 \qquad f''_{xy}(D) = 2 \qquad f''_{yy}(D) = -6$$

- Hessova matice pro bod C je $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = -4$, $D_2 = 20$.
- Protože je $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, je v bodě D lokální maximum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto maxima: $f(D) = 2$.

Příklad 1

- Dosadíte-li bod D, dostanete:

$$f''_{xx}(D) = -4 \qquad f''_{xy}(D) = 2 \qquad f''_{yy}(D) = -6$$

- Hessova matice pro bod C je $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = -4$, $D_2 = 20$.
- Protože je $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, je v bodě D lokální maximum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto maxima: $f(D) = 2$.

Příklad 1

- Dosadíte-li bod D, dostanete:

$$f''_{xx}(D) = -4 \qquad f''_{xy}(D) = 2 \qquad f''_{yy}(D) = -6$$

- Hessova matice pro bod C je $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = -4$, $D_2 = 20$.
- Protože je $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, je v bodě D lokální maximum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto maxima: $f(D) = 2$.

Příklad 1

- Závěr: funkce

$$f(x,y) = 2x^2y + 5x - \frac{x}{y^2}$$

má dva lokální extrémy; lokální minimum v bodě

$$C = [-1, 1]\,,$$

kde

$$f(C) = -2$$

a lokální maximum v bodě

$$D = [1, -1]\,,$$

kde

$$f(D) = 2.$$

Příklad 2

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x, y) = 3x^2 - 18x + \operatorname{arctan}\left(2xy^2\right)$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
- $$f'_x = 6x - 18 + \frac{2y^2}{1 + 4x^2y^4} \qquad f'_y = \frac{4xy}{1 + 4x^2y^4}$$
- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 2

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x,y) = 3x^2 - 18x + \arctan\left(2xy^2\right)$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
-

$$f'_x = 6x - 18 + \frac{2y^2}{1+4x^2y^4} \qquad f'_y = \frac{4xy}{1+4x^2y^4}$$

- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 2

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x,y) = 3x^2 - 18x + \operatorname{arctan}\left(2xy^2\right)$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
- $$f'_x = 6x - 18 + \frac{2y^2}{1+4x^2y^4} \qquad f'_y = \frac{4xy}{1+4x^2y^4}$$
- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 2

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x, y) = 3x^2 - 18x + \arctan\left(2xy^2\right)$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
- $$f'_x = 6x - 18 + \frac{2y^2}{1 + 4x^2y^4} \qquad f'_y = \frac{4xy}{1 + 4x^2y^4}$$
- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 2

- Pohledem na druhou rovnici zjistíte, že buď $x = 0$ nebo $y = 0$. Obě varianty dosaďte postupně do první rovnice.
- Ve variantě (a) máte

$$-18 + 2y^2 = 0$$

a ve variantě (b) dostanete

$$6x - 18 = 0.$$

Příklad 2

- Pohledem na druhou rovnici zjistíte, že buď $x = 0$ nebo $y = 0$. Obě varianty dosaďte postupně do první rovnice.
- Ve variantě (a) máte

$$-18 + 2y^2 = 0$$

a ve variantě (b) dostanete

$$6x - 18 = 0.$$

Příklad 2

- Ve variantě (a) dostanete pro y dvě řešení, ve variantě (b) dostanete pro x řešení jediné.
- Celkem dostanete tři stacionární body:

$$A = [0,-3]\,,\quad B = [0,3]\,,\quad C = [3,0]\,.$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
-

$$f''_{xx} = 6 - \frac{16xy^6}{(1+4x^2y^4)^2} \qquad f''_{xy} = \frac{4y - 16x^2y^5}{(1+4x^2y^4)^2} \qquad f''_{yy} = \frac{4x - 48x^3y^4}{(1+4x^2y^4)^2}$$

Příklad 2

- Ve variantě (a) dostanete pro y dvě řešení, ve variantě (b) dostanete pro x řešení jediné.
- Celkem dostanete tři stacionární body:

$$A = [0, -3]\,, \quad B = [0, 3]\,, \quad C = [3, 0]\,.$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
-

$$f''_{xx} = 6 - \frac{16xy^6}{(1+4x^2y^4)^2} \qquad f''_{xy} = \frac{4y - 16x^2y^5}{(1+4x^2y^4)^2} \qquad f''_{yy} = \frac{4x - 48x^3y^4}{(1+4x^2y^4)^2}$$

Příklad 2

- Ve variantě (a) dostanete pro y dvě řešení, ve variantě (b) dostanete pro x řešení jediné.
- Celkem dostanete tři stacionární body:

$$A = [0,-3]\,,\quad B = [0,3]\,,\quad C = [3,0]\,.$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
- $$f''_{xx} = 6 - \frac{16xy^6}{(1+4x^2y^4)^2} \qquad f''_{xy} = \frac{4y - 16x^2y^5}{(1+4x^2y^4)^2} \qquad f''_{yy} = \frac{4x - 48x^3y^4}{(1+4x^2y^4)^2}$$

Příklad 2

- Ve variantě (a) dostanete pro y dvě řešení, ve variantě (b) dostanete pro x řešení jediné.
- Celkem dostanete tři stacionární body:

$$A = [0,-3]\,,\quad B = [0,3]\,,\quad C = [3,0]\,.$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
-

$$f''_{xx} = 6 - \frac{16xy^6}{(1+4x^2y^4)^2} \qquad f''_{xy} = \frac{4y - 16x^2y^5}{(1+4x^2y^4)^2} \qquad f''_{yy} = \frac{4x - 48x^3y^4}{(1+4x^2y^4)^2}$$

Příklad 2

- Nyní body A, B a C postupně dosaďte do druhých derivací, napište si pro každý z nich Hessovu matici a spočtěte determinanty D_1 a D_2.
- Zjistíte, že pro A i pro B je $D_2 < 0$. V těchto bodech tedy není lokální extrém.
- Hessova matice pro bod C je $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = 6$, $D_2 = 72$.
- Protože je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, je v bodě C lokální minimum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto minima: $f(C) = -27$.

Příklad 2

- Nyní body A, B a C postupně dosaďte do druhých derivací, napište si pro každý z nich Hessovu matici a spočtěte determinanty D_1 a D_2.
- Zjistíte, že pro A i pro B je $D_2 < 0$. V těchto bodech tedy není lokální extrém.
- Hessova matice pro bod C je $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = 6$, $D_2 = 72$.
- Protože je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, je v bodě C lokální minimum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto minima: $f(C) = -27$.

Příklad 2

- Nyní body A, B a C postupně dosaďte do druhých derivací, napište si pro každý z nich Hessovu matici a spočtěte determinanty D_1 a D_2.
- Zjistíte, že pro A i pro B je $D_2 < 0$. V těchto bodech tedy není lokální extrém.
- Hessova matice pro bod C je $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = 6$, $D_2 = 72$.
- Protože je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, je v bodě C lokální minimum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto minima: $f(C) = -27$.

Příklad 2

- Nyní body A, B a C postupně dosaďte do druhých derivací, napište si pro každý z nich Hessovu matici a spočtěte determinanty D_1 a D_2.
- Zjistíte, že pro A i pro B je $D_2 < 0$. V těchto bodech tedy není lokální extrém.
- Hessova matice pro bod C je $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = 6$, $D_2 = 72$.
- Protože je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, je v bodě C lokální minimum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto minima: $f(C) = -27$.

Příklad 2

- Nyní body A, B a C postupně dosaďte do druhých derivací, napište si pro každý z nich Hessovu matici a spočtěte determinanty D_1 a D_2.
- Zjistíte, že pro A i pro B je $D_2 < 0$. V těchto bodech tedy není lokální extrém.
- Hessova matice pro bod C je $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = 6$, $D_2 = 72$.
- Protože je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, je v bodě C lokální minimum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto minima: $f(C) = -27$.

Příklad 2

- Závěr: funkce

$$f(x, y) = 3x^2 - 18x + \operatorname{arctan}\left(2xy^2\right)$$

má jediný lokální extrém; lokální minimum v bodě

$$C = [3, 0]\,,$$

kde

$$f(C) = -27.$$

Příklad 3

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x,y) = (2x-y)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
-

$$f'_x = (2x-y+2)\,\mathrm{e}^{x-6y^3} \qquad f'_y = \left(-36xy^2+18y^3-1\right)\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 3

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x, y) = (2x - y)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
-

$$f'_x = (2x - y + 2)\,\mathrm{e}^{x-6y^3} \qquad f'_y = (-36xy^2 + 18y^3 - 1)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 3

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x, y) = (2x - y)\,e^{x-6y^3}$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
-

$$f'_x = (2x - y + 2)\,e^{x-6y^3} \qquad f'_y = (-36xy^2 + 18y^3 - 1)\,e^{x-6y^3}$$

- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 3

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x, y) = (2x - y)\, e^{x-6y^3}$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
-

$$f'_x = (2x - y + 2)\, e^{x-6y^3} \qquad f'_y = (-36xy^2 + 18y^3 - 1)\, e^{x-6y^3}$$

- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 3

- V obou rovnicích můžete vydělit exponenciálou, která je nenulová. Z první rovnice vyjádříte

$$y = 2x + 2$$

a dosadíte do druhé rovnice.

- Druhá rovnice je po dosazení rovnicí kvadratickou

$$144x^2 + 288x + 143 = 0,$$

jen byste měli při jejím řešení využít toho, že víte, že $144 = 12^2$. Pak už snadno najdete dva kořeny.

- Po spočtených x ještě dopočtete y.

Příklad 3

- V obou rovnicích můžete vydělit exponenciálou, která je nenulová. Z první rovnice vyjádříte

$$y = 2x + 2$$

a dosadíte do druhé rovnice.

- Druhá rovnice je po dosazení rovnicí kvadratickou

$$144x^2 + 288x + 143 = 0,$$

jen byste měli při jejím řešení využít toho, že víte, že $144 = 12^2$. Pak už snadno najdete dva kořeny.

- Po spočtených x ještě dopočtete y.

Příklad 3

- V obou rovnicích můžete vydělit exponenciálou, která je nenulová. Z první rovnice vyjádříte

$$y = 2x + 2$$

a dosadíte do druhé rovnice.

- Druhá rovnice je po dosazení rovnicí kvadratickou

$$144x^2 + 288x + 143 = 0,$$

jen byste měli při jejím řešení využít toho, že víte, že $144 = 12^2$. Pak už snadno najdete dva kořeny.

- Po spočtených x ještě dopočtete y.

Příklad 3

- Máte nalezeny dva stacionární body:

$$A = \left[-\frac{13}{12}, -\frac{1}{6}\right], \quad B = \left[-\frac{11}{12}, \frac{1}{6}\right].$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
- $$f''_{xx} = (2x - y + 4)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$$
$$f''_{xy} = \left(-36xy^2 + 18y^3 - 36y^2 - 1\right)\mathrm{e}^{x-6y^3}$$
$$f''_{yy} = \left(18xy^4 - 9y^5 - 2xy + 2y^2\right)\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

Příklad 3

- Máte nalezeny dva stacionární body:

$$A = \left[-\frac{13}{12}, -\frac{1}{6}\right], \quad B = \left[-\frac{11}{12}, \frac{1}{6}\right].$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
-

$$f''_{xx} = (2x - y + 4)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

$$f''_{xy} = (-36xy^2 + 18y^3 - 36y^2 - 1)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

$$f''_{yy} = (18xy^4 - 9y^5 - 2xy + 2y^2)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

Příklad 3

- Máte nalezeny dva stacionární body:

$$A = \left[-\frac{13}{12}, -\frac{1}{6}\right], \quad B = \left[-\frac{11}{12}, \frac{1}{6}\right].$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
-

$$f''_{xx} = (2x - y + 4)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

$$f''_{xy} = (-36xy^2 + 18y^3 - 36y^2 - 1)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

$$f''_{yy} = (18xy^4 - 9y^5 - 2xy + 2y^2)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

Příklad 3

- Máte nalezeny dva stacionární body:

$$A = \left[-\frac{13}{12}, -\frac{1}{6}\right], \quad B = \left[-\frac{11}{12}, \frac{1}{6}\right].$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
-

$$f''_{xx} = (2x - y + 4)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

$$f''_{xy} = (-36xy^2 + 18y^3 - 36y^2 - 1)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

$$f''_{yy} = (18xy^4 - 9y^5 - 2xy + 2y^2)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

Příklad 3

- Nyní body A a B postupně dosaďte do druhých derivací, napište si pro každý z nich Hessovu matici a spočtěte determinanty D_1 a D_2. Je to zde na rozdíl od předchozích příkladů početně náročnější.
- Zjistíte, že pro A je $D_2 < 0$. V bodě A tedy není lokální extrém.
- Hessova matice pro bod B je $\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} & -\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} \\ -\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} & 25\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = 2\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}}$, $D_2 = 242\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{9}}$.
- Protože je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, je v bodě A lokální minimum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto minima: $f(A) = -2\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}}$.

Příklad 3

- Nyní body A a B postupně dosaďte do druhých derivací, napište si pro každý z nich Hessovu matici a spočtěte determinanty D_1 a D_2. Je to zde na rozdíl od předchozích příkladů početně náročnější.
- Zjistíte, že pro A je $D_2 < 0$. V bodě A tedy není lokální extrém.
- Hessova matice pro bod B je $\begin{pmatrix} 2\,e^{-\frac{17}{18}} & -e^{-\frac{17}{18}} \\ -e^{-\frac{17}{18}} & 25\,e^{-\frac{17}{18}} \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = 2\,e^{-\frac{17}{18}}$, $D_2 = 242\,e^{-\frac{17}{9}}$.
- Protože je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, je v bodě A lokální minimum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto minima: $f(A) = -2\,e^{-\frac{17}{18}}$.

Příklad 3

- Nyní body A a B postupně dosaďte do druhých derivací, napište si pro každý z nich Hessovu matici a spočtěte determinanty D_1 a D_2. Je to zde na rozdíl od předchozích příkladů početně náročnější.
- Zjistíte, že pro A je $D_2 < 0$. V bodě A tedy není lokální extrém.
- Hessova matice pro bod B je $\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} & -\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} \\ -\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} & 25\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = 2\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}}$, $D_2 = 242\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{9}}$.
- Protože je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, je v bodě A lokální minimum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto minima: $f(A) = -2\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}}$.

Příklad 3

- Nyní body A a B postupně dosaďte do druhých derivací, napište si pro každý z nich Hessovu matici a spočtěte determinanty D_1 a D_2. Je to zde na rozdíl od předchozích příkladů početně náročnější.
- Zjistíte, že pro A je $D_2 < 0$. V bodě A tedy není lokální extrém.
- Hessova matice pro bod B je $\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} & -\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} \\ -\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} & 25\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = 2\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}}$, $D_2 = 242\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{9}}$.
- Protože je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, je v bodě A lokální minimum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto minima: $f(A) = -2\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}}$.

Příklad 3

- Nyní body A a B postupně dosaďte do druhých derivací, napište si pro každý z nich Hessovu matici a spočtěte determinanty D_1 a D_2. Je to zde na rozdíl od předchozích příkladů početně náročnější.
- Zjistíte, že pro A je $D_2 < 0$. V bodě A tedy není lokální extrém.
- Hessova matice pro bod B je $\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} & -\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} \\ -\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} & 25\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}} \end{pmatrix}$ a determinanty $D_1 = 2\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}}$, $D_2 = 242\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{9}}$.
- Protože je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, je v bodě A lokální minimum.
- Spočtěte také funkční hodnotu v bodě tohoto minima: $f(A) = -2\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}}$.

Příklad 3

- Závěr: funkce

$$f(x,y) = (2x - y)\,\mathrm{e}^{x-6y^3}$$

má jediný lokální extrém; lokální minimum v bodě

$$A = \left[-\frac{11}{12}, \frac{1}{6}\right],$$

kde

$$f(A) = -2\,\mathrm{e}^{-\frac{17}{18}}\,.$$

Příklad 4

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x,y) = 5x^2 - \sqrt{2}xy + 5x + \frac{5}{16}\ln\left(x^3y\right)$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
-

$$f'_x = 10x - \sqrt{2}y + 5 + \frac{15}{16x} \qquad f'_y = -\sqrt{2}x + \frac{5}{16y}$$

- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 4

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x,y) = 5x^2 - \sqrt{2}xy + 5x + \frac{5}{16}\ln\left(x^3y\right)$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
- $$f'_x = 10x - \sqrt{2}y + 5 + \frac{15}{16x} \qquad f'_y = -\sqrt{2}x + \frac{5}{16y}$$
- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 4

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x,y) = 5x^2 - \sqrt{2}xy + 5x + \frac{5}{16}\ln\left(x^3y\right)$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
-

$$f'_x = 10x - \sqrt{2}y + 5 + \frac{15}{16x} \qquad f'_y = -\sqrt{2}x + \frac{5}{16y}$$

- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 4

- Najděte lokální extrémy funkce:

$$f(x, y) = 5x^2 - \sqrt{2}xy + 5x + \frac{5}{16}\ln\left(x^3y\right)$$

- Spočítejte si sami parciální derivace!
- $$f'_x = 10x - \sqrt{2}y + 5 + \frac{15}{16x} \qquad f'_y = -\sqrt{2}x + \frac{5}{16y}$$
- Parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce.

Příklad 4

- Z druhé rovnice můžete vyjádřit y:

$$y = \frac{5}{16\sqrt{2}x},$$

To dosadíte do první rovnice.

- Druhá rovnice po dosazení vychází

$$10x + 5 + \frac{5}{8x},$$

což snadno upravíte na kvadratickou rovnici a najdete její jeden (dvojnásobný) kořen.

- Poté ještě dopočtete y.

Příklad 4

- Z druhé rovnice můžete vyjádřit y:

$$y = \frac{5}{16\sqrt{2}x},$$

To dosadíte do první rovnice.

- Druhá rovnice po dosazení vychází

$$10x + 5 + \frac{5}{8x},$$

což snadno upravíte na kvadratickou rovnici a najdete její jeden (dvojnásobný) kořen.

- Poté ještě dopočtete y.

Příklad 4

- Z druhé rovnice můžete vyjádřit y:

$$y = \frac{5}{16\sqrt{2}x},$$

  To dosadíte do první rovnice.

- Druhá rovnice po dosazení vychází

$$10x + 5 + \frac{5}{8x},$$

  což snadno upravíte na kvadratickou rovnici a najdete její jeden (dvojnásobný) kořen.

- Poté ještě dopočtete y.

Příklad 4

- Našli jsme jediný stacionární bod:

$$A = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4\sqrt{2}}\right].$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
-

$$f''_{xx} = 10 - \frac{15}{16x^2} \qquad f''_{xy} = -\sqrt{2} \qquad f''_{yy} = -\frac{5}{16y^2}$$

Příklad 4

- Našli jsme jediný stacionární bod:

$$A = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4\sqrt{2}}\right].$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
- $$f''_{xx} = 10 - \frac{15}{16x^2} \qquad f''_{xy} = -\sqrt{2} \qquad f''_{yy} = -\frac{5}{16y^2}$$

Příklad 4

- Našli jsme jediný stacionární bod:

$$A = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4\sqrt{2}}\right].$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
- $$f''_{xx} = 10 - \frac{15}{16x^2} \qquad f''_{xy} = -\sqrt{2} \qquad f''_{yy} = -\frac{5}{16y^2}$$

Příklad 4

- Našli jsme jediný stacionární bod:

$$A = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4\sqrt{2}}\right].$$

- A nyní – opět sami – si spočtěte druhé parciální derivace!
- $$f''_{xx} = 10 - \frac{15}{16x^2} \qquad f''_{xy} = -\sqrt{2} \qquad f''_{yy} = -\frac{5}{16y^2}$$

Příklad 4

- Nyní spočtený bod A dosaďte do druhých derivací, napište Hessovu matici a spočtěte determinanty D_1 a D_2.
- Hessova matice pro bod A je

$$\begin{pmatrix} -5 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

  Determinant $D_1 = -5$ a determinant $D_2 = 0$.
- Protože je $D_1 < 0$, mohlo by být v A lokální maximum. Protože ale je $D_2 = 0$, pro rozhodnutí o maximu D_1 a D_2 nepostačují.

Příklad 4

- Nyní spočtený bod A dosaďte do druhých derivací, napište Hessovu matici a spočtěte determinanty D_1 a D_2.
- Hessova matice pro bod A je

$$\begin{pmatrix} -5 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Determinant $D_1 = -5$ a determinant $D_2 = 0$.

- Protože je $D_1 < 0$, mohlo by být v A lokální maximum. Protože ale je $D_2 = 0$, pro rozhodnutí o maximu D_1 a D_2 nepostačují.

Příklad 4

- Nyní spočtený bod A dosaďte do druhých derivací, napište Hessovu matici a spočtěte determinanty D_1 a D_2.
- Hessova matice pro bod A je

$$\begin{pmatrix} -5 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Determinant $D_1 = -5$ a determinant $D_2 = 0$.

- Protože je $D_1 < 0$, mohlo by být v A lokální maximum. Protože ale je $D_2 = 0$, pro rozhodnutí o maximu D_1 a D_2 nepostačují.

Příklad 4

- Nyní spočtený bod A dosaďte do druhých derivací, napište Hessovu matici a spočtěte determinanty D_1 a D_2.
- Hessova matice pro bod A je

$$\begin{pmatrix} -5 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Determinant $D_1 = -5$ a determinant $D_2 = 0$.

- Protože je $D_1 < 0$, mohlo by být v A lokální maximum. Protože ale je $D_2 = 0$, pro rozhodnutí o maximu D_1 a D_2 nepostačují.

Příklad 4 *

- Máme ale $D_2 = 0$, $f''_{yy}(A) = -\frac{2}{5} < 0$. To znamená negativní semidefinitnost druhého diferenciálu.
- Podíváme-li se na druhý diferenciál v A,

$$-5\,\mathrm{d}x^2 - 2\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{2}{5}\,\mathrm{d}y^2$$

vidíme, že skutečně pro vektor $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\sqrt{2}, -5)$ vychází nulový.

Příklad 4 *

- Máme ale $D_2 = 0$, $f''_{yy}(A) = -\frac{2}{5} < 0$. To znamená negativní semidefinitnost druhého diferenciálu.
- Podíváme-li se na druhý diferenciál v A,

$$-5\,\mathrm{d}x^2 - 2\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{2}{5}\,\mathrm{d}y^2$$

vidíme, že skutečně pro vektor $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\sqrt{2}, -5)$ vychází nulový.

Příklad 4 *

- Je to už nepovinné, ale ti z vás, kteří jste zvědavi, jak to dopadne, ještě chvíli pokračujte. Budete si muset spočítat třetí parciální derivace.
- $$f'''_{xxx} = \frac{15}{8x^3} \qquad f'''_{xxy} = 0 \qquad f'''_{xyy} = 0 \qquad f'''_{yyy} = \frac{5}{8y^3}$$
- $$f'''_{xxx}(A) = -120 \qquad f'''_{yyy}(A) = -\frac{16\sqrt{2}}{25}$$
- Zjišťujeme, že třetí diferenciál je nenulový i pro podezřelý vektor $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\sqrt{2}, -5)$. A protože je násoben $\frac{\varepsilon^3}{6}$, které může být jak kladné, tak záporné, není v A lokální extrém.

Příklad 4 *

- Je to už nepovinné, ale ti z vás, kteří jste zvědavi, jak to dopadne, ještě chvíli pokračujte. Budete si muset spočítat třetí parciální derivace.
- $$f'''_{xxx} = \frac{15}{8x^3} \qquad f'''_{xxy} = 0 \qquad f'''_{xyy} = 0 \qquad f'''_{yyy} = \frac{5}{8y^3}$$
- $$f'''_{xxx}(A) = -120 \qquad f'''_{yyy}(A) = -\frac{16\sqrt{2}}{25}$$
- Zjišťujeme, že třetí diferenciál je nenulový i pro podezřelý vektor $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\sqrt{2}, -5)$. A protože je násoben $\frac{\varepsilon^3}{6}$, které může být jak kladné, tak záporné, není v A lokální extrém.

Příklad 4 *

- Je to už nepovinné, ale ti z vás, kteří jste zvědavi, jak to dopadne, ještě chvíli pokračujte. Budete si muset spočítat třetí parciální derivace.
- $$f'''_{xxx} = \frac{15}{8x^3} \qquad f'''_{xxy} = 0 \qquad f'''_{xyy} = 0 \qquad f'''_{yyy} = \frac{5}{8y^3}$$
- $$f'''_{xxx}(A) = -120 \qquad f'''_{yyy}(A) = -\frac{16\sqrt{2}}{25}$$
- Zjišťujeme, že třetí diferenciál je nenulový i pro podezřelý vektor $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\sqrt{2}, -5)$. A protože je násoben $\frac{\varepsilon^3}{6}$, které může být jak kladné, tak záporné, není v A lokální extrém.

Příklad 4 *

- Je to už nepovinné, ale ti z vás, kteří jste zvědavi, jak to dopadne, ještě chvíli pokračujte. Budete si muset spočítat třetí parciální derivace.
- $$f'''_{xxx} = \frac{15}{8x^3} \qquad f'''_{xxy} = 0 \qquad f'''_{xyy} = 0 \qquad f'''_{yyy} = \frac{5}{8y^3}$$
- $$f'''_{xxx}(A) = -120 \qquad f'''_{yyy}(A) = -\frac{16\sqrt{2}}{25}$$
- Zjišťujeme, že třetí diferenciál je nenulový i pro podezřelý vektor $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\sqrt{2}, -5)$. A protože je násoben $\frac{\varepsilon^3}{6}$, které může být jak kladné, tak záporné, není v A lokální extrém.

Příklad 4

- Závěr: funkce

$$5x^2 - \sqrt{2}xy + 5x + \frac{5}{16}\ln\left(x^3y\right)$$

má stacionární bod

$$A = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4\sqrt{2}}\right],$$

ve kterém by mohlo být lokální maximum, ale dle Sylvesterova kritéria jsme o něm nerozhodli.

- *Není tam. ;-)

Příklad 4

- Závěr: funkce

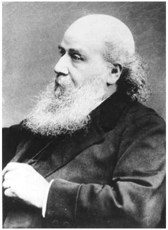
$$5x^2 - \sqrt{2}xy + 5x + \frac{5}{16}\ln\left(x^3y\right)$$

má stacionární bod

$$A = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4\sqrt{2}}\right],$$

ve kterém by mohlo být lokální maximum, ale dle Sylvesterova kritéria jsme o něm nerozhodli.

- *Není tam. ;-)



Dieterici, Hesse a Sylvester.