Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Text pro Matematiku 2 na FCH VUT v Brně

Miroslav Kureš

Ústav matematiky FSI VUT v Brně

duben 2020

Obsah

Separovatelné proměnné

Rovnicí se separovatelnými proměnnými rozumíme rovnici, která je tvaru

$$y' = g(x)h(y)$$

(nebo jde na tento tvar upravit).

Separovatelné proměnné

Derivaci y' si vyjádříme ve tvaru podílu $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, tzn.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y)$$

a upravíme na tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Separovatelné proměnné

Nyní stačí integrovat

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

a dostaneme

$$\widetilde{H}(y) = G(x) + c.$$

Pokud to lze, vyjádříme y.

Lineární rovnice

Lineární rovnicí rozumíme rovnici, která je tvaru

$$y' + a(x)y = b(x)$$

(nebo jde na tento tvar upravit).

Lineární rovnice

Je-li $b(x) = 0$, nazýváme lineární rovnici *homogenní.* Jde tedy o rovnici

$$y' + a(x)y = 0,$$

což je ale rovnice se separovatelnými proměnnými! V tomto případě tedy nic nového.

Lineární rovnice

Je-li $b(x) \neq 0$, nazýváme lineární rovnici *nehomogenní.* Jde o rovnici

$$y' + a(x)y = b(x),$$

která obecně rovnicí se separovatelnými proměnnými není. Jak ji řešit?

Lineární rovnice

Místo rovnice

$$y' + a(x)y = b(x)$$

napřed řešíme zhomogenizovanou rovnici

$$y' + a(x)y = 0,$$

jejíž obecné řešení označíme y_H.

Lineární rovnice

V obecném řešení y_H se vyskytuje integrační konstanta c. *Metoda variace konstanty* spočívá v tom, že obecné řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru y_H, kde místo konstanty c uvažujeme funkci $c(x)$.
Pokud nám například vyšlo $y_H = cx^2$, předpokládáme y ve tvaru $y = c(x)x^2$. Potřebujeme dopočítat funkci $c(x)$.

Lineární rovnice

Funkci $c(x)$ dopočteme tak, že předpokládané řešení dosadíme do původní rovnice a osamostatníme $c'(x)$. To vždycky lze a po dosazení a úpravách nám v rovnici vždy zůstane $c'(x)$ a nezůstane tam $c(x)$.
Máme tedy na levé straně $c'(x)$, na pravé straně funkci proměnné x. Integrací dostaneme hledanou funkci $c(x)$, nezapomeňme, že po integraci dostaneme novou integrační konstantu C.

Lineární rovnice

Velmi jednoduchý příklad: rovnice

$$y' = 5.$$

Zhomogenizovaná rovnice $y' = 0$ má obecné řešení $y_H = c$, řešení nehomogenní tedy hledáme ve tvaru $y = c(x)$. Dosadíme do původní rovnice a máme

$$c'(x) = 5$$

a odtud $c(x) = 5x + C$ a tedy $y = 5x + C$.

Lineární rovnice: proč metoda variace konstant funguje *

Zhomogenizovaná rovnice má obecné řešení

$$y_H = c\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x};$$

c nahradíme $c(x)$ a dosadíme

$$y = c(x)\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$$

do původní rovnice.

Substituce I

Uvažujme rovnici

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

(Příkladem může být rovnice $y' + \left(\frac{y}{x} - \frac{1}{4}\right)^2 = 0$, kterou vyřešíme později. Jiným příkladem je rovnice $xyy' = x^2 + y^2$, kterou je třeba upravit.)
Použijeme substituci

$$v = \frac{y}{x};$$

z vyjádření

$$y = vx$$

odvodíme

$$y' = v'x + v.$$

Substituce I

Po dosazení máme

$$v'x + v = f(v)$$

čili

$$v' = \frac{1}{x}(f(v) - v)$$

a to je rovnice se separovatelnými proměnnými.

Substituce II

Jinou rovnicí vhodnou pro substituci je rovnice

$$y' + a(x)y = b(x)y^r,$$

které se říká *Bernoulliho rovnice*. (Je-li $r = 0$, jde o lineární rovnici. Je-li $r = 1$, jde o rovnici se separovatelnými proměnnými. Proto se zabýváme případem $r \neq 0$, $r \neq 1$; r nemusí být ani kladné, ani celé.)
Použijeme substituci

$$v = y^{1-r};$$

z toho

$$v' = (1-r)y^{-r}y'$$

a tedy

$$y' = \frac{v'}{(1-r)y^{-r}}.$$

Substituce II

Dosadíme do původní rovnice

$$\frac{v'}{(1-r)y^{-r}} + a(x)y = b(x)y^r$$

a vynásobíme y^{-r}. Dostaneme

$$\frac{v'}{(1-r)} + a(x)y^{1-r} = b(x)$$

a protože $y^{1-r} = v$, máme

$$\frac{v'}{(1-r)} + a(x)v = b(x),$$

což je lineární rovnice pro funkci $v(x)$.

Příklad 1

- Řešte počáteční úlohu

$$y' = x \sin\left(\frac{x}{2}\right) y^2 \qquad y(0) = -\frac{1}{4}.$$

- Jde o rovnici se separovatelnými proměnnými. Lze ji přepsat takto:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x \sin\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$$

- Nyní doplňte integrály a integrujte.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \left(x \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \mathrm{d}x$$

Příklad 1

- Řešte počáteční úlohu

$$y' = x \sin\left(\frac{x}{2}\right) y^2 \qquad y(0) = -\frac{1}{4}.$$

- Jde o rovnici se separovatelnými proměnnými. Lze ji přepsat takto:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x \sin\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$$

- Nyní doplňte integrály a integrujte.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \left(x \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \mathrm{d}x$$

Příklad 1

- Řešte počáteční úlohu

$$y' = x \sin\left(\frac{x}{2}\right) y^2 \qquad y(0) = -\frac{1}{4}.$$

- Jde o rovnici se separovatelnými proměnnými. Lze ji přepsat takto:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x \sin\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$$

- Nyní doplňte integrály a integrujte.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \left(x \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \mathrm{d}x$$

Příklad 1

- Integrál na levé straně je elementární.
- $$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\frac{1}{y}$$
- Integrál na pravé straně řešte takto: napřed vezměte substituci $t = \frac{x}{2}$. Poté použijte per partes.
- $$\int \left(x \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \mathrm{d}x = -2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Příklad 1

- Integrál na levé straně je elementární.
- $$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\frac{1}{y}$$
- Integrál na pravé straně řešte takto: napřed vezměte substituci $t = \frac{x}{2}$. Poté použijte per partes.
- $$\int \left(x \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \mathrm{d}x = -2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Příklad 1

- Integrál na levé straně je elementární.
- $$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\frac{1}{y}$$
- Integrál na pravé straně řešte takto: napřed vezměte substituci $t = \frac{x}{2}$. Poté použijte per partes.
- $$\int \left(x \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \mathrm{d}x = -2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Příklad 1

- Integrál na levé straně je elementární.
- $$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\frac{1}{y}$$
- Integrál na pravé straně řešte takto: napřed vezměte substituci $t = \frac{x}{2}$. Poté použijte per partes.
- $$\int \left(x \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \mathrm{d}x = -2x \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 4 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Příklad 1

- Po doplnění integrační konstanty dostanete

$$-\frac{1}{y} = -2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) + c,$$

a můžete vyjádřit y.

- $$y = \frac{1}{2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) - c}$$

je obecným řešením rovnice.

- Dosazením počáteční podmínky $y(0) = -\frac{1}{4}$ spočtete c.

$$-\frac{1}{4} = \frac{1}{2\cdot 0\cdot\cos\left(\frac{0}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{0}{2}\right) - c}$$

Příklad 1

- Po doplnění integrační konstanty dostanete

$$-\frac{1}{y} = -2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) + c,$$

a můžete vyjádřit y.

- $$y = \frac{1}{2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) - c}$$

je obecným řešením rovnice.

- Dosazením počáteční podmínky $y(0) = -\frac{1}{4}$ spočtete c.

$$-\frac{1}{4} = \frac{1}{2\cdot 0\cdot\cos\left(\frac{0}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{0}{2}\right) - c}$$

Příklad 1

- Po doplnění integrační konstanty dostanete
$$-\frac{1}{y} = -2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) + c,$$
a můžete vyjádřit y.
- $$y = \frac{1}{2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) - c}$$
je obecným řešením rovnice.
- Dosazením počáteční podmínky $y(0) = -\frac{1}{4}$ spočtete c.
$$-\frac{1}{4} = \frac{1}{2\cdot 0\cdot\cos\left(\frac{0}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{0}{2}\right) - c}$$

Příklad 1

- Našli jste
$$c = 4.$$
- Závěr: řešením počáteční úlohy
$$y' = x \sin\left(\frac{x}{2}\right) y^2 \qquad y(0) = -\frac{1}{4}$$
je funkce
$$y = \frac{1}{2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 4}.$$

Příklad 1

- Našli jste

$$c = 4.$$

- Závěr: řešením počáteční úlohy

$$y' = x \sin\left(\frac{x}{2}\right) y^2 \qquad y(0) = -\frac{1}{4}$$

je funkce

$$y = \frac{1}{2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 4}.$$

Příklad 2

- Řešte počáteční úlohu

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{x^2} \qquad y(1) = -2.$$

- Jde o rovnici lineární, nehomogenní. Zhomogenizovaná rovnice

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

je rovnicí se separovatelnými proměnnými.

- Rovnici se separovatelnými proměnnými už umíte řešit. Vyřešte ji a její obecné řešení označte y_H.
-

$$y_H = \frac{c}{x}$$

Příklad 2

- Řešte počáteční úlohu

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{x^2} \qquad y(1) = -2.$$

- Jde o rovnici lineární, nehomogenní. Zhomogenizovaná rovnice

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

je rovnicí se separovatelnými proměnnými.

- Rovnici se separovatelnými proměnnými už umíte řešit. Vyřešte ji a její obecné řešení označte y_H.

-

$$y_H = \frac{c}{x}$$

Příklad 2

- Řešte počáteční úlohu

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{x^2} \qquad y(1) = -2.$$

- Jde o rovnici lineární, nehomogenní. Zhomogenizovaná rovnice

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

  je rovnicí se separovatelnými proměnnými.
- Rovnici se separovatelnými proměnnými už umíte řešit. Vyřešte ji a její obecné řešení označte y_H.
- $$y_H = \frac{c}{x}$$

Příklad 2

- Řešte počáteční úlohu

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{x^2} \qquad y(1) = -2.$$

- Jde o rovnici lineární, nehomogenní. Zhomogenizovaná rovnice

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

  je rovnicí se separovatelnými proměnnými.
- Rovnici se separovatelnými proměnnými už umíte řešit. Vyřešte ji a její obecné řešení označte y_H.
-

$$y_H = \frac{c}{x}$$

Příklad 2

- Teď použijte metodu variace konstanty. To znamená, že obecné řešení původní, nehomogenní rovnice hledáte ve tvaru

$$y = \frac{c(x)}{x}$$

- Po dosazení do rovnice máte

$$\frac{c'(x)x - c(x)}{x^2} + \frac{\frac{c(x)}{x}}{x} = \frac{2}{x^2}.$$

- Po úpravě dostanete

$$c'(x) = \frac{2}{x}$$

a integrací spočtete hledanou funkci $c(x)$.

Příklad 2

- Teď použijte metodu variace konstanty. To znamená, že obecné řešení původní, nehomogenní rovnice hledáte ve tvaru

$$y = \frac{c(x)}{x}$$

- Po dosazení do rovnice máte

$$\frac{c'(x)x - c(x)}{x^2} + \frac{\frac{c(x)}{x}}{x} = \frac{2}{x^2}.$$

- Po úpravě dostanete

$$c'(x) = \frac{2}{x}$$

a integrací spočtete hledanou funkci $c(x)$.

Příklad 2

- Teď použijte metodu variace konstanty. To znamená, že obecné řešení původní, nehomogenní rovnice hledáte ve tvaru
$$y = \frac{c(x)}{x}$$
- Po dosazení do rovnice máte
$$\frac{c'(x)x - c(x)}{x^2} + \frac{\frac{c(x)}{x}}{x} = \frac{2}{x^2}.$$
- Po úpravě dostanete
$$c'(x) = \frac{2}{x}$$
a integrací spočtete hledanou funkci $c(x)$.

Příklad 2

- Vyjde

$$c(x) = 2\ln(x) + C$$

- a obecné řešení nehomogenní rovnice proto je

$$y = \frac{2\ln(x) + C}{x}.$$

- Zbývá dosadit počáteční podmínku; pak

$$-2 = \frac{2\ln(1) + C}{1}.$$

a odtud

$$C = -2.$$

Příklad 2

- Vyjde
$$c(x) = 2\ln(x) + C$$
- a obecné řešení nehomogenní rovnice proto je
$$y = \frac{2\ln(x) + C}{x}.$$
- Zbývá dosadit počáteční podmínku; pak
$$-2 = \frac{2\ln(1) + C}{1}.$$
a odtud
$$C = -2.$$

Příklad 2

- Vyjde
$$c(x) = 2\ln(x) + C$$
- a obecné řešení nehomogenní rovnice proto je
$$y = \frac{2\ln(x) + C}{x}.$$
- Zbývá dosadit počáteční podmínku; pak
$$-2 = \frac{2\ln(1) + C}{1}.$$
  a odtud
$$C = -2.$$

Příklad 2

- Závěr: řešením počáteční úlohy

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{x^2} \qquad y(1) = -2$$

je funkce

$$y = \frac{2\ln(x) - 2}{x}.$$

Příklad 3

- Řešte počáteční úlohu

$$y' + \left(\frac{y}{x} - \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \qquad y(1) = 0.$$

- Použijte substituci $v = \frac{y}{x}$. Pak $y' = v'x + v$ a dostanete

$$v'x + v + \left(v - \frac{1}{4}\right)^2 = 0.$$

- Úpravami dostanete rovnici se separovatelnými proměnnými, kterou dále upravíte na integrály:
-

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\left(v + \frac{1}{4}\right)^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Příklad 3

- Řešte počáteční úlohu

$$y' + \left(\frac{y}{x} - \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \qquad y(1) = 0.$$

- Použijte substituci $v = \frac{y}{x}$. Pak $y' = v'x + v$ a dostanete

$$v'x + v + \left(v - \frac{1}{4}\right)^2 = 0.$$

- Úpravami dostanete rovnici se separovatelnými proměnnými, kterou dále upravíte na integrály:
-

$$\int \frac{dv}{\left(v + \frac{1}{4}\right)^2} = -\int \frac{dx}{x}$$

Příklad 3

- Řešte počáteční úlohu

$$y' + \left(\frac{y}{x} - \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \qquad y(1) = 0.$$

- Použijte substituci $v = \frac{y}{x}$. Pak $y' = v'x + v$ a dostanete

$$v'x + v + \left(v - \frac{1}{4}\right)^2 = 0.$$

- Úpravami dostanete rovnici se separovatelnými proměnnými, kterou dále upravíte na integrály:
-

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\left(v + \frac{1}{4}\right)^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Příklad 3

- Řešte počáteční úlohu

$$y' + \left(\frac{y}{x} - \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \qquad y(1) = 0.$$

- Použijte substituci $v = \frac{y}{x}$. Pak $y' = v'x + v$ a dostanete

$$v'x + v + \left(v - \frac{1}{4}\right)^2 = 0.$$

- Úpravami dostanete rovnici se separovatelnými proměnnými, kterou dále upravíte na integrály:
-

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\left(v+\frac{1}{4}\right)^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Příklad 3

- Integrál na pravé straně je elementární.
- $$-\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\ln|x|$$
- Integrál na levé straně řešte substitucí $w = v + \frac{1}{4}$.
- $$\int \frac{\mathrm{d}v}{\left(v+\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{1}{v+\frac{1}{4}}.$$

Příklad 3

- Integrál na pravé straně je elementární.
- $$-\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\ln|x|$$
- Integrál na levé straně řešte substitucí $w = v + \frac{1}{4}$.
- $$\int \frac{\mathrm{d}v}{\left(v + \frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{1}{v + \frac{1}{4}}.$$

Příklad 3

- Integrál na pravé straně je elementární.
- $$-\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\ln|x|$$
- Integrál na levé straně řešte substitucí $w = v + \frac{1}{4}$.
- $$\int \frac{\mathrm{d}v}{\left(v + \frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{1}{v + \frac{1}{4}}.$$

Příklad 3

- Integrál na pravé straně je elementární.
- $$-\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\ln|x|$$
- Integrál na levé straně řešte substitucí $w = v + \frac{1}{4}$.
- $$\int \frac{\mathrm{d}v}{\left(v+\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{1}{v+\frac{1}{4}}.$$

Příklad 3

- Máte
$$-\frac{1}{v+\frac{1}{4}} = -\ln|x| + c,$$
- dosaďte za v a upravte:
- $$y = \frac{x}{\ln|x| - c} - \frac{x}{4}$$
- Dostali jste obecné řešení. Obvyklým způsobem dopočtěte konstantu. Vyjde $c = -4$.

Příklad 3

- Máte
$$-\frac{1}{v+\frac{1}{4}} = -\ln|x| + c,$$
- dosaďte za v a upravte:
-
$$y = \frac{x}{\ln|x| - c} - \frac{x}{4}$$
- Dostali jste obecné řešení. Obvyklým způsobem dopočtěte konstantu. Vyjde $c = -4$.

Příklad 3

- Máte
$$-\frac{1}{v+\frac{1}{4}} = -\ln|x| + c,$$
- dosaďte za v a upravte:
- $$y = \frac{x}{\ln|x| - c} - \frac{x}{4}$$
- Dostali jste obecné řešení. Obvyklým způsobem dopočtěte konstantu. Vyjde $c = -4$.

Příklad 3

- Máte
$$-\frac{1}{v+\frac{1}{4}} = -\ln|x| + c,$$
- dosaďte za v a upravte:
- $$y = \frac{x}{\ln|x| - c} - \frac{x}{4}$$
- Dostali jste obecné řešení. Obvyklým způsobem dopočtěte konstantu. Vyjde $c = -4$.

Příklad 3

- Závěr: řešením počáteční úlohy

$$y' + \left(\frac{y}{x} - \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \qquad y(1) = 0$$

je funkce

$$y = \frac{x}{\ln|x| + 4} - \frac{x}{4}.$$

Příklad 4

- Řešte počáteční úlohu

$$y' + 9y = \frac{4x}{y^3} \qquad y(-2) = \frac{1}{3}.$$

- Jde o Bernoulliho rovnici, kde $r = -3$. Použijte substituci $v = y^4$. Pak $y' = \frac{v'}{4y^3}$ a dostanete

$$\frac{v'}{4y^3} + 9y = \frac{4x}{y^3}.$$

- Vynásobte $4y^3$ (a použijte $v = y^4$).
- $$v' + 36v = 16x$$

  je lineární nehomogenní rovnice. Vyřešte ji.

Příklad 4

- Řešte počáteční úlohu
$$y' + 9y = \frac{4x}{y^3} \qquad y(-2) = \frac{1}{3}.$$
- Jde o Bernoulliho rovnici, kde $r = -3$. Použijte substituci $v = y^4$. Pak $y' = \frac{v'}{4y^3}$ a dostanete
$$\frac{v'}{4y^3} + 9y = \frac{4x}{y^3}.$$
- Vynásobte $4y^3$ (a použijte $v = y^4$).
- $$v' + 36v = 16x$$
je lineární nehomogenní rovnice. Vyřešte ji.

Příklad 4

- Řešte počáteční úlohu

$$y' + 9y = \frac{4x}{y^3} \qquad y(-2) = \frac{1}{3}.$$

- Jde o Bernoulliho rovnici, kde $r = -3$. Použijte substituci $v = y^4$. Pak $y' = \frac{v'}{4y^3}$ a dostanete

$$\frac{v'}{4y^3} + 9y = \frac{4x}{y^3}.$$

- Vynásobte $4y^3$ (a použijte $v = y^4$).
-

$$v' + 36v = 16x$$

je lineární nehomogenní rovnice. Vyřešte ji.

Příklad 4

- Řešte počáteční úlohu
$$y' + 9y = \frac{4x}{y^3} \qquad y(-2) = \frac{1}{3}.$$
- Jde o Bernoulliho rovnici, kde $r = -3$. Použijte substituci $v = y^4$. Pak $y' = \frac{v'}{4y^3}$ a dostanete
$$\frac{v'}{4y^3} + 9y = \frac{4x}{y^3}.$$
- Vynásobte $4y^3$ (a použijte $v = y^4$).
- $$v' + 36v = 16x$$
je lineární nehomogenní rovnice. Vyřešte ji.

Příklad 4

- Při řešení lineární rovnice byste neměli narazit na žádné nečekané překážky. Napřed vyřešíte zhomogenizovanou rovnici a pak použijete metodu variace konstanty. Celkem vyjde obecné řešení

$$v = c\,\mathrm{e}^{-36x} + \frac{4x}{9} - \frac{1}{81}.$$

- Odtud

$$y = \sqrt[4]{c\,\mathrm{e}^{-36x} + \frac{4x}{9} - \frac{1}{81}} \quad \text{nebo} \quad y = -\sqrt[4]{c\,\mathrm{e}^{-36x} + \frac{4x}{9} - \frac{1}{81}}.$$

- Vzhledem k naší počáteční podmínce $y(-2) = \frac{1}{3}$, tzn. y kladné, použijte tu první z nich a dopočtěte c.

Příklad 4

- Při řešení lineární rovnice byste neměli narazit na žádné nečekané překážky. Napřed vyřešíte zhomogenizovanou rovnici a pak použijete metodu variace konstanty. Celkem vyjde obecné řešení

$$v = c\,\mathrm{e}^{-36x} + \frac{4x}{9} - \frac{1}{81}.$$

- Odtud

$$y = \sqrt[4]{c\,\mathrm{e}^{-36x} + \frac{4x}{9} - \frac{1}{81}} \quad \text{nebo} \quad y = -\sqrt[4]{c\,\mathrm{e}^{-36x} + \frac{4x}{9} - \frac{1}{81}}.$$

- Vzhledem k naší počáteční podmínce $y(-2) = \frac{1}{3}$, tzn. y kladné, použijte tu první z nich a dopočtěte c.

Příklad 4

- Při řešení lineární rovnice byste neměli narazit na žádné nečekané překážky. Napřed vyřešíte zhomogenizovanou rovnici a pak použijete metodu variace konstanty. Celkem vyjde obecné řešení

$$v = c\,\mathrm{e}^{-36x} + \frac{4x}{9} - \frac{1}{81}.$$

- Odtud

$$y = \sqrt[4]{c\,\mathrm{e}^{-36x} + \frac{4x}{9} - \frac{1}{81}} \quad \text{nebo} \quad y = -\sqrt[4]{c\,\mathrm{e}^{-36x} + \frac{4x}{9} - \frac{1}{81}}.$$

- Vzhledem k naší počáteční podmínce $y(-2) = \frac{1}{3}$, tzn. y kladné, použijte tu první z nich a dopočtěte c.

Příklad 4

- Dostanete
$$c = \frac{74}{81\,\mathrm{e}^{72}}.$$
- Dosaďte c a pokuste se výslednou funkci ještě trochu upravit.

Příklad 4

- Dostanete
$$c = \frac{74}{81\,\mathrm{e}^{72}}.$$
- Dosaďte c a pokuste se výslednou funkci ještě trochu upravit.

Příklad 4

- Závěr: řešením počáteční úlohy

$$y' + 9y = \frac{4x}{y^3} \qquad y(-2) = \frac{1}{3}$$

je funkce

$$y = \frac{1}{3}\sqrt[4]{74\,\mathrm{e}^{-36(x+2)} + 36x - 1}$$