Lineární ODR řádu *n*

Text pro Matematiku 2 na FCH VUT v Brně

Miroslav Kureš

Ústav matematiky FSI VUT v Brně

duben 2020

Obsah

Lineární rovnice

Lineární ODR řádu n rozumíme rovnici

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

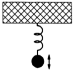
Je-li $b(x) = 0$, hovoříme o *homogenní rovnici*.
Jsou-li všechny funkce $a_i(x)$ konstantní, hovoříme o *rovnici s konstantními koeficienty*.

Homogenní LODR s konstantními koeficienty

Budeme se zabývat homogenními lineárními rovnicemi s konstatními koeficienty. Příkladem je rovnice

$$8y'''''' - 28y''''' - 58y'''' + 363y''' - 860y'' + 1900y' - 2000y = 0.$$

Homogenní LODR s konstantními koeficienty



Pro objekt připojený k pružině popisuje Hookeův zákon vztah síly a vychýlení z rovnovážné polohy

$$F = -kx$$

(k pružinová konstanta: obvykle v Nm^{-1}, pro chemické vazby tradičně milidyn na Ångström). Z druhého Newtonova pohybového zákona

$$F = ma$$

pak máme

$$ma = -kx,$$

tj.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Charakteristická rovnice

K rovnici

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

přidružíme tzv. *charakteristickou rovnici*

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

a vyřešíme ji. Jde o nalezení kořenů polynomu stupně n v komplexním oboru. Těchto kořenů je včetně násobnosti n. Kořenům budeme přiřazovat funkce, které jsou partikulárními řešeními původní rovnice.

Kořeny charakteristické rovnice: reálné jednoduché

Je-li λ jednoduchým reálným kořenem charakteristické rovnice, přiřadíme mu partikulární řešení

$$e^{\lambda x}\,.$$

Například pro $\lambda = -3$ to bude řešení e^{-3x}.
Nebo pro $\lambda = 0$ to bude řešení 1.

Kořeny charakteristické rovnice: reálné násobné

Je-li λ k-násobným reálným kořenem charakteristické rovnice, přiřadíme mu partikulární řešení

$$\mathrm{e}^{\lambda x}, x\,\mathrm{e}^{\lambda x}, x^2\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Například pro dvojnásobný kořen $\lambda = -3$ to budou řešení e^{-3x} a $x\,\mathrm{e}^{-3x}$.
Nebo pro pětinásobný kořen $\lambda = 0$ to budou řešení 1, x, x^2, x^3, x^4.

Kořeny charakteristické rovnice: imaginární jednoduché

Je-li $\alpha + \beta\,\mathrm{i}$ jednoduchým imaginárním kořenem charakteristické rovnice, je jejím kořenem také komplexně sdružené číslo $\alpha - \beta\,\mathrm{i}$.
V tomto případě přiřadíme partikulární řešení

$$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{a} \quad \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Například pro $\alpha + \beta\,\mathrm{i} = -3 + 2\,\mathrm{i}$ to budou řešení $\mathrm{e}^{-3x}\cos(2x)$ a $\mathrm{e}^{-3x}\sin(2x)$.
Nebo pro $\lambda = \mathrm{i}$ to budou řešení $\cos x$ a $\sin x$.

* Kořeny charakteristické rovnice: imaginární násobné

Je-li $\alpha + \beta\,\mathrm{i}$ k-násobným imaginárním kořenem charakteristické rovnice, je jejím k-násobným kořenem také komplexně sdružené číslo $\alpha - \beta\,\mathrm{i}$.
V tomto případě přiřadíme partikulární řešení

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x),\ \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x),\\
&x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x),\\
&x^2\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x^2\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x),\\
&\dots\\
&x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x).
\end{aligned}$$

Například pro dvojnásobný kořen $\alpha + \beta\,\mathrm{i} = 12 + 5\,\mathrm{i}$ to budou řešení $\mathrm{e}^{12x}\cos(5x)$, $\mathrm{e}^{12x}\sin(5x)$, $x\,\mathrm{e}^{12x}\cos(5x)$ a $x\,\mathrm{e}^{12x}\sin(5x)$.

Fundamentální soustava a obecné řešení

Všech řešení, která jsme uvedenou metodou přiřazovali kořenům charakteristické rovnice je n. Označme je

$$\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n.$$

Jsou lineárně nezávislá a tvoří tzv. *fundamentální soustavu řešení*.
Obecné řešení pak je jejich lineární kombinací.

$$\boxed{y = c_1\tilde{y}_1 + c_2\tilde{y}_2 + \cdots + c_n\tilde{y}_n}$$

Počáteční úloha

K lineární rovnici řádu n může být dále zadáno n počátečních podmínek tvaru

$$y(x_0) = y_{00}, y'(x_0) = y_{10}, y''(x_0) = y_{20}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1\,0}.$$

Jejich dosazením do obecného řešení dostaneme soustavu n lineárních rovnic, kterou řešíme a tím spočteme $c_1, \dots, c_n$.

Příklad 1

Najděte řešení počáteční úlohy

$$9y'' + 24y' + 16y = 0, \quad y(0) = 9, \quad y'(0) = 0.$$

Příklad 1

- Napište charakteristickou rovnici.
- $$9\lambda^2 + 24\lambda + 16 = 0$$
- Vyřešte charakteristickou rovnici (je kvadratická).
- $$\lambda_{1,2} = -\frac{4}{3},$$

  máme tedy kořen násobnosti 2.

Příklad 1

- Napište charakteristickou rovnici.
- $$9\lambda^2 + 24\lambda + 16 = 0$$
- Vyřešte charakteristickou rovnici (je kvadratická).
- $$\lambda_{1,2} = -\frac{4}{3},$$

  máme tedy kořen násobnosti 2.

Příklad 1

- Napište charakteristickou rovnici.
- $$9\lambda^2 + 24\lambda + 16 = 0$$
- Vyřešte charakteristickou rovnici (je kvadratická).
- $$\lambda_{1,2} = -\frac{4}{3},$$

  máme tedy kořen násobnosti 2.

Příklad 1

- Napište charakteristickou rovnici.
- $$9\lambda^2 + 24\lambda + 16 = 0$$
- Vyřešte charakteristickou rovnici (je kvadratická).
- $$\lambda_{1,2} = -\frac{4}{3},$$

  máme tedy kořen násobnosti 2.

Příklad 1

- Máte

$$\tilde{y}_1 = \mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}, \ \tilde{y}_2 = x\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}$$

- a obecné řešení proto je

$$y = c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x} + c_2 x\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}.$$

- Jeho derivace je

$$y' = -\frac{4}{3}c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x} + (1 - \frac{4}{3}x)c_2\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}.$$

Příklad 1

- Máte

$$\tilde{y}_1 = \mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}, \; \tilde{y}_2 = x\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}$$

- a obecné řešení proto je

$$y = c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x} + c_2 x\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}.$$

- Jeho derivace je

$$y' = -\frac{4}{3}c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x} + (1 - \frac{4}{3}x)c_2\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}.$$

Příklad 1

- Máte

$$\tilde{y}_1 = \mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}, \ \tilde{y}_2 = x\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}$$

- a obecné řešení proto je

$$y = c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x} + c_2 x\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}.$$

- Jeho derivace je

$$y' = -\frac{4}{3}c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x} + (1 - \frac{4}{3}x)c_2\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}.$$

Příklad 1

- Dosaďte počáteční podmínky:
- $$\begin{aligned} 9 &= c_1 e^{-\frac{4}{3}\cdot 0} + c_2 \cdot 0 e^{-\frac{4}{3}\cdot 0} \\ 0 &= -\frac{4}{3} c_1 e^{-\frac{4}{3}\cdot 0} + (1 - \frac{4}{3}\cdot 0) c_2 e^{-\frac{4}{3}\cdot 0}. \end{aligned}$$
- To je jednoduché! Spočtěte c_1 a c_2.
- $$c_1 = 9, \qquad c_2 = 12.$$

Příklad 1

- Dosaďte počáteční podmínky:
-
$$\begin{aligned} 9 &= c_1\, e^{-\frac{4}{3}\cdot 0} + c_2 \cdot 0\, e^{-\frac{4}{3}\cdot 0} \\ 0 &= -\frac{4}{3} c_1\, e^{-\frac{4}{3}\cdot 0} + (1 - \frac{4}{3}\cdot 0) c_2\, e^{-\frac{4}{3}\cdot 0}\,. \end{aligned}$$
- To je jednoduché! Spočtěte c_1 a c_2.
-
$$c_1 = 9, \qquad c_2 = 12.$$

Příklad 1

- Dosaďte počáteční podmínky:
- $$\begin{aligned} 9 &= c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\cdot 0} + c_2\cdot 0\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\cdot 0} \\ 0 &= -\frac{4}{3}c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\cdot 0} + \left(1-\frac{4}{3}\cdot 0\right)c_2\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\cdot 0}\,. \end{aligned}$$
- To je jednoduché! Spočtěte c_1 a c_2.
- $$c_1 = 9, \qquad c_2 = 12.$$

Příklad 1

- Dosaďte počáteční podmínky:
- $$\begin{aligned} 9 &= c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\cdot 0} + c_2 \cdot 0\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\cdot 0} \\ 0 &= -\frac{4}{3}c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\cdot 0} + \left(1 - \frac{4}{3}\cdot 0\right)c_2\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\cdot 0}\,. \end{aligned}$$
- To je jednoduché! Spočtěte c_1 a c_2.
- $$c_1 = 9, \qquad c_2 = 12.$$

Příklad 1

Řešením počáteční úlohy

$$9y'' + 24y' + 16y = 0, \quad y(0) = 9, \quad y'(0) = 0.$$

je funkce

$$y = 9\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x} + 12x\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}.$$

Příklad 2

Najděte obecné řešení rovnice

$$2y'''' - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$$

Příklad 2

- Napište charakteristickou rovnici.
- $$2\lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
- Najděte kořeny. Jde o rovnici 4. řádu a pravděpodobně neznáte obecný vzorec. Zkuste dosadit nějaké číslo.
- Pokud jste dosadili 1, zjistili jste, že je kořenem. Vydělte kořenovým součinitelem $(\lambda - 1)$ a opakujte postup.
- Měli byste najít 1 jako dvojnásobný kořen a dále komplexně sdružené imaginární kořeny $\frac{\sqrt{2}}{2}$ i a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i.

Příklad 2

- Napište charakteristickou rovnici.
- $$2\lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
- Najděte kořeny. Jde o rovnici 4. řádu a pravděpodobně neznáte obecný vzorec. Zkuste dosadit nějaké číslo.
- Pokud jste dosadili 1, zjistili jste, že je kořenem. Vydělte kořenovým součinitelem $(\lambda - 1)$ a opakujte postup.
- Měli byste najít 1 jako dvojnásobný kořen a dále komplexně sdružené imaginární kořeny $\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$ a $-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$.

Příklad 2

- Napište charakteristickou rovnici.
- $$2\lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
- Najděte kořeny. Jde o rovnici 4. řádu a pravděpodobně neznáte obecný vzorec. Zkuste dosadit nějaké číslo.
- Pokud jste dosadili 1, zjistili jste, že je kořenem. Vydělte kořenovým součinitelem $(\lambda - 1)$ a opakujte postup.
- Měli byste najít 1 jako dvojnásobný kořen a dále komplexně sdružené imaginární kořeny $\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$ a $-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$.

Příklad 2

- Napište charakteristickou rovnici.
- $$2\lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
- Najděte kořeny. Jde o rovnici 4. řádu a pravděpodobně neznáte obecný vzorec. Zkuste dosadit nějaké číslo.
- Pokud jste dosadili 1, zjistili jste, že je kořenem. Vydělte kořenovým součinitelem $(\lambda - 1)$ a opakujte postup.
- Měli byste najít 1 jako dvojnásobný kořen a dále komplexně sdružené imaginární kořeny $\frac{\sqrt{2}}{2}$ i a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i.

Příklad 2

- Napište charakteristickou rovnici.
- $$2\lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$
- Najděte kořeny. Jde o rovnici 4. řádu a pravděpodobně neznáte obecný vzorec. Zkuste dosadit nějaké číslo.
- Pokud jste dosadili 1, zjistili jste, že je kořenem. Vydělte kořenovým součinitelem $(\lambda - 1)$ a opakujte postup.
- Měli byste najít 1 jako dvojnásobný kořen a dále komplexně sdružené imaginární kořeny $\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}$ a $-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}$.

Příklad 2

Závěr: rovnice

$$2y'''' - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$$

má obecné řešení

$$y = c_1 \, \mathrm{e}^x + c_2 x \, \mathrm{e}^x + c_3 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + c_4 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$$