Nehomogenní lineární ODR řádu *n*

Text pro Matematiku 2 na FCH VUT v Brně

Miroslav Kureš

Ústav matematiky FSI VUT v Brně

duben 2020

Obsah

Metoda variace konstant

Budeme se zabývat nehomogenními lineární rovnicí s konstatními koeficienty, tedy

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

resp.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x),$$

Obecné řešení zhomogenizované rovnice označíme y_H; obsahuje n parametrů (konstant) $c_1, \ldots, c_n$. Fundamentální soustava tohoto řešení se skládá z funkcí $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$.

Metoda variace konstant

Řešení nehomogenní rovnice hledáme v tvaru

$$c_1(x)\tilde{y}_1 + \dots c_n(x)\tilde{y}_n.$$

Funkce $c_1(x), \dots, c_n(x)$ najdeme takto: vyřešíme soustavu

$$\begin{aligned}
c_1'(x)\tilde{y}_1 + \dots + c_n'(x)\tilde{y}_n &= 0\\
c_1'(x)\tilde{y}_1' + \dots + c_n'(x)\tilde{y}_n' &= 0\\
&\dots\\
c_1'(x)\tilde{y}_1^{(n-2)} + \dots + c_n'(x)\tilde{y}_n^{(n-2)} &= 0\\
c_1'(x)\tilde{y}_1^{(n-1)} + \dots + c_n'(x)\tilde{y}_n^{(n-1)} &= b(x)
\end{aligned}$$

pro neznámé funkce $c_1'(x), \dots c_n'(x)$.

Metoda variace konstant

Jde o soustavu lineární. Doporučenou metodou pro její řešení je užití Cramerova pravidla.
Následně spočteme funkce $c_1(x), \dots c_n(x)$ integrací funkcí $c_1'(x), \dots c_n'(x)$.

Metoda variace konstant

Pro nejčastější případ $n = 2$ má soustava rovnic pro $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ jednoduchý tvar

$$\begin{aligned} c_1'(x)\tilde{y}_1 + c_2'(x)\tilde{y}_2 &= 0 \\ c_1'(x)\tilde{y}_1' + c_2'(x)\tilde{y}_2' &= b(x) \end{aligned}$$

Metoda neurčitých koeficientů

Metoda vychází ze skutečnosti, že

$$y = y_H + \tilde{y},$$

kde y_H je řešení zhomogenizované rovnice a $\tilde{y}$ nějaké partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Metoda neurčitých koeficientů

Hledáme tedy $\tilde{y}$. Je-li na pravé straně polynom, jako např. v rovnici

$$y''' + 2y' - 3y = 2 + 21x + 8x^3 - 3x^4,$$

hledáme $\tilde{y}$ ve tvaru polynomu. Jsou-li na pravé straně goniometrické funkce, jako např. v rovnici

$$y''' + 2y' - 3y = 21\cos(2x) + 22\sin(2x),$$

hledáme $\tilde{y}$ jako nějakou kombinaci $\cos(2x)$ a $\sin(2x)$. To lze zobecnit.

Metoda neurčitých koeficientů

Speciálním tvarem pravé strany rozumíme funkci

$$e^{\alpha x}\left(P_h(x)\cos(\beta x) + Q_k(x)\sin(\beta x)\right).$$

Partikulární řešení $\tilde{y}$ pak můžeme hledat ve tvaru

$$x^r\, e^{\alpha x}\left(S_m(x)\cos(\beta x) + T_m(x)\sin(\beta x)\right),$$

kde $m = \max\{h, k\}$ a r je násobnost kořene $\alpha + \beta\,\mathrm{i}$ v charakteristické rovnici zhomogenozované lineární rovnice. ($r = 0$, není-li jejím kořenem.)

Metoda neurčitých koeficientů

Polynomy $S_m(x)$, $T_m(x)$ jsou polynomy s neurčitými koeficienty. $\tilde{y}$ (a derivace) dosadíme a porovnáme koeficienty stojící u jednotlivých mocnin x na levé a pravé straně. To vede na soustavu lineárních rovnic, kterou vyřešíme.

Příklad 1

- Řešte počáteční úlohu

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{8+8x^2}, \qquad y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$$

- Nejprve rovnici zhomogenizujte a zhomogenizovanou vyřešte. (Téma minulé přednášky.)
- Zhomogenizovaná rovnice je

$$y'' - 2y' + y = 0$$

a její obecné řešení je

$$y_H = c_1 e^x + c_2 x e^x .$$

Příklad 1

- Řešte počáteční úlohu

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{8+8x^2}, \qquad y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$$

- Nejprve rovnici zhomogenizujte a zhomogenizovanou vyřešte. (Téma minulé přednášky.)
- Zhomogenizovaná rovnice je

$$y'' - 2y' + y = 0$$

a její obecné řešení je

$$y_H = c_1 e^x + c_2 x e^x .$$

Příklad 1

- Řešte počáteční úlohu

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{8+8x^2}, \qquad y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$$

- Nejprve rovnici zhomogenizujte a zhomogenizovanou vyřešte. (Téma minulé přednášky.)
- Zhomogenizovaná rovnice je

$$y'' - 2y' + y = 0$$

a její obecné řešení je

$$y_H = c_1 e^x + c_2 x e^x .$$

Příklad 1

- Nyní napište předpokládaný tvar řešení nehomogenní rovnice.
-
$$y = c_1(x)\,e^x + c_2(x)x\,e^x$$
- Máte $\tilde{y}_1 = e^x$, $\tilde{y}_2 = x\,e^x$. Pak $\tilde{y}_1' = e^x$, $\tilde{y}_2' = (1+x)\,e^x$. Napište soustavu, z niž spočtete $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$.
-
$$\begin{aligned} c_1'(x)\,e^x + c_2'(x)x\,e^x &= 0 \\ c_1'(x)\,e^x + c_2'(x)\,(1+x)\,e^x &= \frac{e^x}{8+8x^2}. \end{aligned}$$

Příklad 1

- Nyní napište předpokládaný tvar řešení nehomogenní rovnice.
- $$y = c_1(x)\,e^x + c_2(x)x\,e^x$$
- Máte $\tilde{y}_1 = e^x$, $\tilde{y}_2 = x\,e^x$. Pak $\tilde{y}_1' = e^x$, $\tilde{y}_2' = (1+x)\,e^x$. Napište soustavu, z níž spočtete $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$.
- $$\begin{aligned} c_1'(x)\,e^x + c_2'(x)x\,e^x &= 0 \\ c_1'(x)\,e^x + c_2'(x)(1+x)\,e^x &= \frac{e^x}{8+8x^2}. \end{aligned}$$

Příklad 1

- Nyní napište předpokládaný tvar řešení nehomogenní rovnice.
- $$y = c_1(x)\,e^x + c_2(x)x\,e^x$$
- Máte $\tilde{y}_1 = e^x$, $\tilde{y}_2 = x\,e^x$. Pak $\tilde{y}_1' = e^x$, $\tilde{y}_2' = (1+x)\,e^x$. Napište soustavu, z níž spočtete $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$.
- $$\begin{aligned} c_1'(x)\,e^x + c_2'(x)x\,e^x &= 0 \\ c_1'(x)\,e^x + c_2'(x)\,(1+x)\,e^x &= \frac{e^x}{8+8x^2}. \end{aligned}$$

Příklad 1

- Nyní napište předpokládaný tvar řešení nehomogenní rovnice.
- $$y = c_1(x)\,e^x + c_2(x) x\,e^x$$
- Máte $\tilde{y}_1 = e^x$, $\tilde{y}_2 = x\,e^x$. Pak $\tilde{y}_1' = e^x$, $\tilde{y}_2' = (1+x)\,e^x$. Napište soustavu, z níž spočtete $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$.
- $$\begin{aligned} c_1'(x)\,e^x + c_2'(x) x\,e^x &= 0 \\ c_1'(x)\,e^x + c_2'(x)\,(1+x)\,e^x &= \frac{e^x}{8+8x^2}. \end{aligned}$$

Příklad 1

- Soustavu vyřešte pomocí Cramerova pravidla.

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x\,e^x \\ \frac{e^x}{8+8x^2} & (1+x)\,e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x\,e^x \\ e^x & (1+x)\,e^x \end{vmatrix}} \qquad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{8+8x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x\,e^x \\ e^x & (1+x)\,e^x \end{vmatrix}}$$

- Spočtěte determinanty a vydělte.
- Dostanete

$$c_1'(x) = -\frac{x}{8+8x^2} \qquad c_2'(x) = \frac{1}{8+8x^2}$$

Příklad 1

- Soustavu vyřešte pomocí Cramerova pravidla.

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x\,e^x \\ \frac{e^x}{8+8x^2} & (1+x)\,e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x\,e^x \\ e^x & (1+x)\,e^x \end{vmatrix}} \qquad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{8+8x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x\,e^x \\ e^x & (1+x)\,e^x \end{vmatrix}}$$

- Spočtěte determinanty a vydělte.
- Dostanete

$$c_1'(x) = -\frac{x}{8+8x^2} \qquad c_2'(x) = \frac{1}{8+8x^2}$$

Příklad 1

- Soustavu vyřešte pomocí Cramerova pravidla.

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x\,e^x \\ \frac{e^x}{8+8x^2} & (1+x)\,e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x\,e^x \\ e^x & (1+x)\,e^x \end{vmatrix}} \quad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{8+8x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x\,e^x \\ e^x & (1+x)\,e^x \end{vmatrix}}$$

- Spočtěte determinanty a vydělte.
- Dostanete

$$c_1'(x) = -\frac{x}{8+8x^2} \quad c_2'(x) = \frac{1}{8+8x^2}$$

Příklad 1

- Nyní chcete spočíst $c_1(x)$ a $c_2(x)$. Získané $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$ tedy budete integrovat.
- Oba integrály jsou snadné. U prvního si uvědomte, že snadnou úpravou lze dosáhnout toho, aby v čitateli byla derivace jmenovatele. A druhý je zcela elementární.
- Vyšlo vám (doufám)

$$c_1(x) = -\frac{1}{16}\ln\left(1+x^2\right) + C_1, \quad c_2(x) = \frac{\arctan x}{8} + C_2.$$

Příklad 1

- Nyní chcete spočíst $c_1(x)$ a $c_2(x)$. Získané $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$ tedy budete integrovat.
- Oba integrály jsou snadné. U prvního si uvědomte, že snadnou úpravou lze dosáhnout toho, aby v čitateli byla derivace jmenovatele. A druhý je zcela elementární.
- Vyšlo vám (doufám)

$$c_1(x) = -\frac{1}{16}\ln\left(1+x^2\right) + C_1, \quad c_2(x) = \frac{\arctan x}{8} + C_2.$$

Příklad 1

- Nyní chcete spočíst $c_1(x)$ a $c_2(x)$. Získané $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$ tedy budete integrovat.
- Oba integrály jsou snadné. U prvního si uvědomte, že snadnou úpravou lze dosáhnout toho, aby v čitateli byla derivace jmenovatele. A druhý je zcela elementární.
- Vyšlo vám (doufám)

$$c_1(x) = -\frac{1}{16} \ln\left(1 + x^2\right) + C_1, \quad c_2(x) = \frac{\arctan x}{8} + C_2.$$

Příklad 1

- Máme tedy obecné řešení

$$y = \left(-\frac{1}{16} \ln\left(1+x^2\right) + C_1\right) e^x + \left(\frac{\arctan x}{8} + C_2\right) x\, e^x$$

- Toto řešení zderivujte a do y a y' dosaďte počáteční podmínky. Tím spočtete C_1 a C_2.
- $$C_1 = -1 \qquad C_2 = 1$$

Příklad 1

- Máme tedy obecné řešení

$$y = \left(-\frac{1}{16} \ln\left(1+x^2\right) + C_1\right) e^x + \left(\frac{\arctan x}{8} + C_2\right) x\, e^x$$

- Toto řešení zderivujte a do y a y' dosaďte počáteční podmínky. Tím spočtete C_1 a C_2.

-

$$C_1 = -1 \qquad C_2 = 1$$

Příklad 1

- Máme tedy obecné řešení

$$y = \left(-\frac{1}{16}\ln\left(1+x^2\right)+C_1\right)e^x + \left(\frac{\arctan x}{8}+C_2\right)x\,e^x$$

- Toto řešení zderivujte a do y a y' dosaďte počáteční podmínky. Tím spočtete C_1 a C_2.
-

$$C_1 = -1 \qquad C_2 = 1$$

Příklad 1

- Závěr: řešením počáteční úlohy

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{8+8x^2}, \qquad y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$$

je funkce

$$y = \left(\frac{\arctan x}{8} + 1\right) x\, e^x - \left(\frac{1}{16} \ln\left(1+x^2\right) + 1\right) e^x .$$

Příklad 2

- Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = \left(8 + 8x^2\right) e^x .$$

- Opět, nejprve rovnici zhomogenizujte a zhomogenizovanou vyřešte. To už máme ale hotovo.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

má obecné řešení

$$y_H = c_1 e^x + c_2 x e^x .$$

Příklad 2

- Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = \left(8 + 8x^2\right) e^x .$$

- Opět, nejprve rovnici zhomogenizujte a zhomogenizovanou vyřešte. To už máme ale hotovo.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

má obecné řešení

$$y_H = c_1 e^x + c_2 x e^x .$$

Příklad 2

- Máme pravou stranu ve speciálním tvaru. Uvědomme si:

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ P_h(x) = 8 + 8x^2\ (h = 2),\ Q_k(x) = 0.$$

- Máme tedy

$$m = 2.$$

- Dále si uvědomme, že $\alpha + \beta\,\mathrm{i} = 1 + 0i = 1$ je dvojnásobným kořenem chakteristické rovnice příslušné ke zhomogenizované rovnici. A proto

$$r = 2.$$

Příklad 2

- Máme pravou stranu ve speciálním tvaru. Uvědomme si:

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ P_h(x) = 8 + 8x^2\ (h = 2),\ Q_k(x) = 0.$$

- Máme tedy

$$m = 2.$$

- Dále si uvědomme, že $\alpha + \beta\,\mathrm{i} = 1 + 0i = 1$ je dvojnásobným kořenem chakteristické rovnice příslušné ke zhomogenizované rovnici. A proto

$$r = 2.$$

Příklad 2

- Máme pravou stranu ve speciálním tvaru. Uvědomme si:

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ P_h(x) = 8 + 8x^2\ (h = 2),\ Q_k(x) = 0.$$

- Máme tedy

$$m = 2.$$

- Dále si uvědomme, že $\alpha + \beta\,\mathrm{i} = 1 + 0i = 1$ je dvojnásobným kořenem chakteristické rovnice příslušné ke zhomogenizované rovnici. A proto

$$r = 2.$$

Příklad 2

- Partikulární řešení nehomogenní rovnice proto budete hledat ve tvaru

$$\begin{aligned}\tilde{y} = \quad & x^2 e^{1x} \left(S_2(x)\cos(0x) + T_2(x)\sin(0x)\right) = \\ & x^2 e^x \left(A + Bx + Cx^2\right) = \left(Ax^2 + Bx^3 + Cx^4\right) e^x .\end{aligned}$$

- Potřebujete si spočítat $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ a levou stranu $\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + \tilde{y}$.

Příklad 2

- Partikulární řešení nehomogenní rovnice proto budete hledat ve tvaru

$$\begin{aligned}\tilde{y} = \quad & x^2 \, e^{1x} \left(S_2(x) \cos(0x) + T_2(x) \sin(0x)\right) = \\ & x^2 \, e^x \left(A + Bx + Cx^2\right) = \left(Ax^2 + Bx^3 + Cx^4\right) e^x \,.\end{aligned}$$

- Potřebujete si spočítat $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ a levou stranu $\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + \tilde{y}$.

Příklad 2

- $$\begin{aligned} \tilde{y}' &= 2Ax\,e^x + (A+3B)\,x^2\,e^x + (B+4C)\,x^3\,e^x + Cx^4\,e^x \\ \tilde{y}'' &= 2A\,e^x + (4A+6B)\,x\,e^x + (A+6B+12C)\,x^2\,e^x + \\ &\quad (B+8C)\,x^3\,e^x + Cx^4\,e^x \end{aligned}$$
- $$\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + \tilde{y} = 2A\,e^x + 6Bx\,e^x + 12Cx^2\,e^x$$
- Levá strana se musí rovnat pravé straně.

Příklad 2

- $$\begin{aligned} \tilde{y}' &= 2Ax\,e^x + (A+3B)\,x^2\,e^x + (B+4C)\,x^3\,e^x + Cx^4\,e^x \\ \tilde{y}'' &= 2A\,e^x + (4A+6B)\,x\,e^x + (A+6B+12C)\,x^2\,e^x + \\ &\quad (B+8C)\,x^3\,e^x + Cx^4\,e^x \end{aligned}$$
- $$\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + \tilde{y} = 2A\,e^x + 6Bx\,e^x + 12Cx^2\,e^x$$
- Levá strana se musí rovnat pravé straně.

Příklad 2

- $$\begin{aligned} \tilde{y}' &= 2Ax\,e^x + (A+3B)\,x^2\,e^x + (B+4C)\,x^3\,e^x + Cx^4\,e^x \\ \tilde{y}'' &= 2A\,e^x + (4A+6B)\,x\,e^x + (A+6B+12C)\,x^2\,e^x + \\ &\quad (B+8C)\,x^3\,e^x + Cx^4\,e^x \end{aligned}$$
- $$\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + \tilde{y} = 2A\,e^x + 6Bx\,e^x + 12Cx^2\,e^x$$
- Levá strana se musí rovnat pravé straně.

Příklad 2

- Máte rovnici

$$2A\,e^x + 6Bx\,e^x + 12Cx^2\,e^x = \left(8 + 8x^2\right) e^x\,.$$

- Vydělte e^x. Pak porovnejte koeficienty, které jsou u $x^0 = 1$, $x^1 = x$ a x^2.
-

$\boxed{x^0}$	$2A = 8$
$\boxed{x^1}$	$6B = 0$
$\boxed{x^2}$	$12C = 8$

Příklad 2

- Máte rovnici

$$2A\,e^x + 6Bx\,e^x + 12Cx^2\,e^x = \left(8 + 8x^2\right) e^x\,.$$

- Vydělte e^x. Pak porovnejte koeficienty, které jsou u $x^0 = 1$, $x^1 = x$ a x^2.
-

$\boxed{x^0}$	$2A = 8$
$\boxed{x^1}$	$6B = 0$
$\boxed{x^2}$	$12C = 8$

Příklad 2

- Máte rovnici

$$2A\,e^x + 6Bx\,e^x + 12Cx^2\,e^x = \left(8+8x^2\right)e^x\,.$$

- Vydělte e^x. Pak porovnejte koeficienty, které jsou u $x^0 = 1$, $x^1 = x$ a x^2.
-

$\boxed{x^0}$	$2A = 8$
$\boxed{x^1}$	$6B = 0$
$\boxed{x^2}$	$12C = 8$

Příklad 2

- Soustava lineárních rovnic vyšla velmi jednoduše. Ihned máme řešení

$$A = 4, \qquad B = 0, \qquad C = \frac{2}{3}.$$

- Stačí nyní přičíst partikulární řešení

$$\tilde{y} = \left(4x^2 + \frac{2}{3}x^4\right) e^x$$

k obecnému řešení y_H zhomogenizované rovnice.

Příklad 2

- Soustava lineárních rovnic vyšla velmi jednoduše. Ihned máme řešení

$$A = 4, \qquad B = 0, \qquad C = \frac{2}{3}.$$

- Stačí nyní přičíst partikulární řešení

$$\tilde{y} = \left(4x^2 + \frac{2}{3}x^4\right)e^x$$

k obecnému řešení y_H zhomogenizované rovnice.

Příklad 2

- Obecné řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = \left(8 + 8x^2\right) e^x .$$

je tvaru

$$y = \left(c_1 + c_2 x + 4x^2 + \frac{2}{3}x^4\right) e^x .$$