Pesticidy na jablkách

Miroslav Kureš

20. dubna 2020

Pesticidy na jablkách. *(Zadání úlohy je převzato z učebnice Roba de Loera Teoretická imunologie.)*

Během období růstu jsou jablka často postřikována pesticidy, aby se zabránilo jejich poškození hmyzem. Jíte-li jablka, akumulujete tyto pesticidy ve svém těle. Důležitým faktorem určujícím koncentraci pesticidů pak je jejich poločas rozpadu v lidském těle. Vhodným matematickým modelem je

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \sigma - \delta P,$$

kde P je množství pesticidů v lidském těle, σ je denní příjem pesticidů ($\sigma = \alpha A$, kde A je počet jablek, která sníte za den a α je množství pesticidů na jablku) a δ vyjadřuje podíl pesticidů, které se v lidských tkáních rozpadnou. Zodpovězte následujících pět otázek.

a. Načrtněte množství pesticidů ve vašem těle jako funkci $P(t)$ vašeho věku za předpokladu, že jíte po celý život stále stejný počet jablek denně.

b. Kolik pesticidů se finálně naakumuluje ve vašem těle, pokud jste jablka jedli desítky let?

c. Předpokládejme, že jste jedli jablka desítky let a pak jste je

přestali jíst, protože vás znepokojili nezdravé účinky pesticidů. Jak dlouho potrvá, než snížíte hladinu pesticidů ve vašem těle na 50%?
d. Předpokládejme, že jste začali jíst dvě jablka denně místo jednoho. Jak se změní model a v jakém stavu se ustálí tentokrát hladina pesticidů ve vašem těle? Jak dlouho potrvá, než snížíte hladinu pesticidů ve vašem těle na 50%?
e. Pro jaké δ je poločas rozpadu pesticidů 50 dní?

Jde o lineární obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu, nehomogenní. Přepíšeme ji na tvar

$$P' + \delta P = \sigma; \tag{1}$$

zhomogenizovaná rovnice pak je

$$P' + \delta P = 0$$

a ta je rovnicí se separovatelnými proměnnými. Můžeme ji upravit na tvar

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -\delta P,$$

a dále na tvar

$$\int \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\int \delta \, \mathrm{d}t.$$

Po integraci (oba integrály jsou zcela elementární) máme

$$\ln |P| = -\delta t + c.$$

Aplikací exponenciální funkce spočteme P:

$$|P| = \mathrm{e}^{-\delta t + c} = \mathrm{e}^c \, \mathrm{e}^{-\delta t},$$

tj.

$$P = C\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,.$$

Protože ale nejde o řešení původní rovnice, ale rovnice zhomogenizované, píšeme zde raději

$$P_H = C\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,. \tag{2}$$

Řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou variace konstanty. Předpokládáme je tedy ve tvaru

$$P = C(x)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,. \tag{3}$$

a dosadíme do (1):

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\delta t} + C(x)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,(-\delta) + \delta C(x)\,\mathrm{e}^{-\delta t} = \sigma$$

To po úpravě dává

$$C'(x) = \sigma\,\mathrm{e}^{\delta t},$$

což zintegrujeme a dostaneme

$$C(x) = \frac{\sigma}{\delta}\,\mathrm{e}^{\delta t} + c.$$

Toto $C(x)$ nyní dosadíme do (3). Dostaneme hledané řešení původní rovnice:

$$P = \frac{\sigma}{\delta} + c\,\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{4}$$

Navíc můžeme uvažovat přirozenou počáteční podmínku: v čase 0 (to je čas, kdy zahájíme konzumaci jablek) je množství pesticidů v lidském těle nulové, tedy $P(0) = 0$. Dosazení do (4)

$$0 = \frac{\sigma}{\delta} + c\,\mathrm{e}^{-\delta\cdot 0}$$

dává

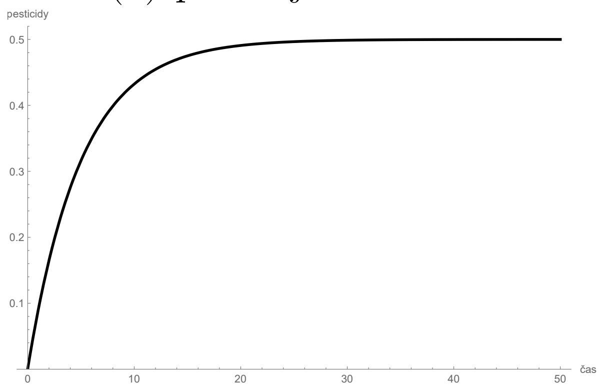
$$-\frac{\sigma}{\delta} = c$$

a máme partikulární řešení

$$P = \frac{\sigma}{\delta}\left(1 - c\,\mathrm{e}^{-\delta t}\right). \tag{5}$$

Nyní můžeme zodpovědět otázky.

a. Odpovědí je funkce (5) pro nějaká $\sigma > 0$ a $\delta > 0$. Graf:



b. Odpovědí je limita

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma}{\delta}\left(1 - c\,\mathrm{e}^{-\delta t}\right) = \frac{\sigma}{\delta}.$$

c. Především, máme $\sigma = 0$, což představuje naši zhomogenizovanou rovnici s obecným řešením (2). Na počátku děje máme dle zadání podmínku $P(0) = \frac{\sigma}{\delta}$. To dává partikulární řešení

$$P = \frac{\sigma}{\delta}\,\mathrm{e}^{-\delta t}$$

a hledáme t, pro něž

$$\frac{\sigma}{2\delta} = \frac{\sigma}{\delta}\,\mathrm{e}^{-\delta t}.$$

Upravíme na tvar

$$\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-\delta t}$$

a zlogaritmujeme. Vyjádřením t máme

$$t = \frac{\ln 2}{\delta},$$

což je doba, za niž se sníží hladina pesticidů na polovinu.

d. Máme model
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 2\sigma - \delta P,$$
s počáteční podmínkou $P(0) = \frac{\sigma}{\delta}$. Je vcelku zřejmé, že limitním stavem tentokrát bude $\frac{2\sigma}{\delta}$. Snížení hladiny pesticidů na 50% ovšem nezáviselo na σ, takže pro tuto dobu zde zůstává odpověď $\frac{\ln 2}{\delta}$.

e. Řešíme rovnici
$$\frac{\ln 2}{\delta} = 50.$$
Řešením je
$$\delta = \frac{\ln 2}{50} \approx 0,01386294.$$