Vázané a globální extrémy funkcí dvou proměnných

Text pro Matematiku 2 na FCH VUT v Brně

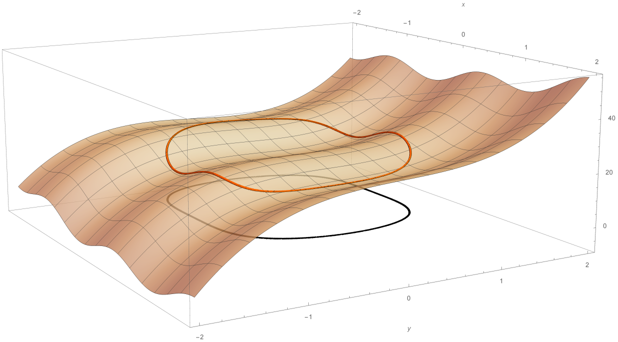
Miroslav Kureš

Ústav matematiky FSI VUT v Brně

březen 2020

Obsah

Názorně



Graf funkce $z = f(x, y)$ je plocha, vazbu $g(x, y) = 0$ představuje křivka v rovině $z = 0$, na obrázku černá. Najít vázané extrémy znamená najít lokální extrémy *nad touto křivkou*, tzn. lokálně nejnižší a nejvyšší body oranžové křivky.

Definice

- Pro funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hledáme její (ostrá) lokální minima a maxima na množině $M \subset \mathbb{R}^2$ určené rovnicí

$$g(x, y) = 0.$$

- Pokud tato minima či maxima existují, nazveme každé z nich *(ostré) vázané (lokální) minimum*, resp. *(ostré) vázané (lokální) maximum*.
  Rovnici $g(x, y) = 0$ nazýváme *vazebná podmínka* nebo krátce *vazba*.

Definice

- Pro funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hledáme její (ostrá) lokální minima a maxima na množině $M \subset \mathbb{R}^2$ určené rovnicí
$$g(x, y) = 0.$$
- Pokud tato minima či maxima existují, nazveme každé z nich *(ostré) vázané (lokální) minimum*, resp. *(ostré) vázané (lokální) maximum*.
  Rovnici $g(x, y) = 0$ nazýváme *vazebná podmínka* nebo krátce *vazba*.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů

(Joseph-Louis Lagrange 1736-1813)
Sestrojíme *Lagrangeovu funkci*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

(λ je tzv. *Lagrangeův multiplikátor*)
Označme

$$A = [x_0, y_0, \lambda_0]$$

stacionární bod L.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů

Dále vezměme

$$\tilde{L}_{\lambda_0}(x, y) = L(x, y, \lambda_0).$$

Má-li funkce $\tilde{L}_{\lambda_0}$ lokální extrém v bodě $\tilde{A} = [x_0, y_0]$, pak má funkce f v témže bodě vázaný (lokální) extrém stejného typu. (Zde si uvědomme: jde o implikaci, nikoliv ekvivalenci!)

Doplnění k metodě Lagrangeových multiplikátorů *

Nelze-li udělat závěr z $\mathrm{d}^2\tilde{L}_{\lambda_0}$, postupujeme tak, že zdiferencujeme vazbu:
Z rovnice $g = 0$ pak máme

$$g'_x \,\mathrm{d}\, x + g'_y \,\mathrm{d}\, y = 0,$$

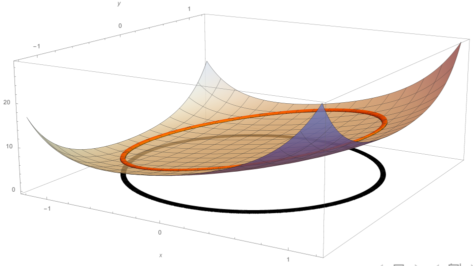
z čehož vyjádříme $\mathrm{d}\, y$ v závislosti na $\mathrm{d}\, x$ (nebo naopak) a dosadíme do $\mathrm{d}^2\tilde{L}_{\lambda_0}$. Z definitnosti takto získané kvadratické formy v bodě $\tilde{A}$ pak plyne existence vázaného extrému v $\tilde{A}$.

Metoda dosazení z vazebné podmínky

Z vazby lze někdy snadno vyjádřit x nebo y. Když dosadíme do funkce f, získáme funkci jediné proměnné a pro tu můžeme najít lokální extrémy.
Případně můžeme z vazby vyjádřit i jinou funkci proměnných x, y tak, že dosazením do funkce f získáme funkci jediné proměnné.
Je třeba si uvědomit, že převedením úlohy na hledání extrémů funkce jedné proměnné obecně můžeme ztrácet stacionární body.

Metoda dosazení z vazebné podmínky

Zkusíme-li například touto metodou najít vázané extrémy funkce $f = \mathrm{e}^{x^2+y^2} + 5x + 5$ pro vazbu $x^2 + y^2 = 1$ (kružnice) tak, že z vazby vyjádříme $x^2 + y^2$ a dosadíme do f, obdržíme funkci φ proměnné x jako $\varphi(x) = 5x + \mathrm{e} + 5$, což je přímka s kladnou směrnicí, která lokální extrémy nemá. Přitom vázané extrémy zřejmě dle obrázku existují!



Metoda dosazení z vazebné podmínky

Dokonce není těžké si i bez výpočtu rozmyslet, jak to v příkladu s vázanými extrémy je: vázané minimum je v bodě $[-1,0]$ a vázané maximum v bodě $[1,0]$. Nenašli jsme je, protože se na graf funkce díváme kolmo ze směru osy y a oranžová křivka se pak jeví skutečně jako část přímky.

Přesto se metoda dosazení z vazebné podmínky často používá. Je jednoduchá a ke „ztrátě" bodů nedochází u všech křivek. Pokud uvažujeme jinou vazbu, například $x = y^2 - \frac{1}{2}$ (parabola), dosazením x obdržíme funkci φ proměnné y jako $\varphi(y) = \mathrm{e}^{\left(y^2-\frac{1}{2}\right)^2+y^2} + 5\left(y^2 - \frac{1}{2}\right) + 5$, tato funkce má minimum pro $y = 0$ (Spočteme $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 10$.) Vázané minimum je tedy v bodě $A = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

Globální extrémy

Funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě A *(ostré) globální minimum*, jestliže $\forall X \in D(f)$, $(X \neq A)$ platí

$$f(X) - f(A) > 0.$$

Na vnitřku $D(f)$ hledáme lokální extrémy.
Na hranici $D(f)$ hledáme vázané extrémy.
Ze všech minim (lokálních i vázaných) vybereme to, jehož funkční hodnota je nejmenší.
Analogicky: *(ostré) globální maximum*.

Příklad 1

- Najděte vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = 27x^3y^2 - \arctan x$$

pro vazebnou podmínku

$$9x^2 + \frac{x}{y} = 0$$

- Vazba je zde křivka složená z přímky (kromě bodu $[0, 0]$) a hyperboly, to si uvědomíte vytknutím x; funkce $g(x, y) = 9x^2 + \frac{x}{y}$. Vytvořte Lagrangeovu funkci L.

Příklad 1

- Najděte vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = 27x^3y^2 - \arctan x$$

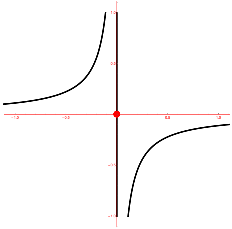
pro vazebnou podmínku

$$9x^2 + \frac{x}{y} = 0$$

- Vazba je zde křivka složená z přímky (kromě bodu $[0, 0]$) a hyperboly, to si uvědomíte vytknutím x; funkce $g(x, y) = 9x^2 + \frac{x}{y}$. Vytvořte Lagrangeovu funkci L.

Příklad 1

- Vazba:

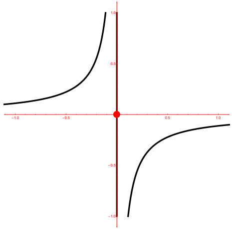


- $$L = 27x^3y^2 - \arctan x + \lambda\left(9x^2 + \frac{x}{y}\right)$$

- Funkci L parciálně zderivujte podle x, y a λ, parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce L.

Příklad 1

- Vazba:

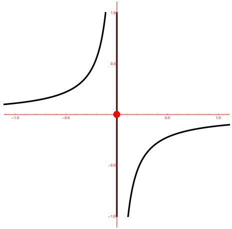


- $$L = 27x^3y^2 - \arctan x + \lambda\left(9x^2 + \frac{x}{y}\right)$$

- Funkci L parciálně zderivujte podle x, y a λ, parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce L.

Příklad 1

- Vazba:



-
$$L = 27x^3y^2 - \arctan x + \lambda\left(9x^2 + \frac{x}{y}\right)$$

- Funkci L parciálně zderivujte podle x, y a λ, parciální derivace položte rovny nule a vzniklou soustavu řešte. Tím najdete stacionární body funkce L.

Příklad 1

- $$\begin{aligned} L'_x &= 81x^2y^2 + 18x\lambda + \frac{\lambda}{y} - \frac{1}{1+x^2} \\ L'_y &= 54x^3y - \frac{x\lambda}{y^2} \\ L'_\lambda &= 9x^2 + \frac{x}{y} \end{aligned}$$

- Derivace položte rovny 0. Je výhodné vytknout v třetí rovnici x. To vede na dvě varianty řešení: ve variantě (a) je $x = 0$ a ve variantě (b) je $x = -\frac{1}{9y}$.

Příklad 1

- $$\begin{aligned} L'_x &= 81x^2y^2 + 18x\lambda + \frac{\lambda}{y} - \frac{1}{1+x^2} \\ L'_y &= 54x^3y - \frac{x\lambda}{y^2} \\ L'_\lambda &= 9x^2 + \frac{x}{y} \end{aligned}$$
- Derivace položte rovny 0. Je výhodné vytknout v třetí rovnici x. To vede na dvě varianty řešení: ve variantě (a) je $x = 0$ a ve variantě (b) je $x = -\frac{1}{9y}$.

Příklad 1

- Varianta (a): Dosazení do druhé rovnice nepřináší nic, dosazení do první rovnice dává

$$\frac{\lambda}{y} - 1 = 0.$$

- Máme proto celou množinu (přímku s vyjmutým bodem) stacionárních bodů:

$$A_t = \{[0, t, t], t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$$

Příklad 1

- Varianta (a): Dosazení do druhé rovnice nepřináší nic, dosazení do první rovnice dává

$$\frac{\lambda}{y} - 1 = 0.$$

- Máme proto celou množinu (přímku s vyjmutým bodem) stacionárních bodů:

$$A_t = \{[0, t, t]\,, t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$$

Příklad 1

- Ve variantě (b): Dosazení do první a druhé rovnice dá po úpravách:

$$\begin{aligned} \frac{y - \lambda - 81y^2\lambda}{y + 81y^3} &= 0 \\ \frac{-2y + 3\lambda}{27y^3} &= 0 \end{aligned}$$

- Nyní ovšem z druhé rovnice snadno spočtete λ:

$$\lambda = \frac{2y}{3}$$

Příklad 1

- Ve variantě (b): Dosazení do první a druhé rovnice dá po úpravách:

$$
\begin{aligned}
\frac{y - \lambda - 81y^2\lambda}{y + 81y^3} &= 0 \\
\frac{-2y + 3\lambda}{27y^3} &= 0
\end{aligned}
$$

- Nyní ovšem z druhé rovnice snadno spočtete λ:

$$\lambda = \frac{2y}{3}$$

Příklad 1

- Dosaďte znovu do první rovnice. Upravujte (stačí čitatele, zde můžete dělit y, protože y nemůže být nula). Dostanete rovnici
$$162y^2 = 1.$$
- Odtud
$$y = \frac{\sqrt{2}}{18} \quad \text{nebo} \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{18}.$$

Příklad 1

- Dosaďte znovu do první rovnice. Upravujte (stačí čitatele, zde můžete dělit y, protože y nemůže být nula). Dostanete rovnici

$$162y^2 = 1.$$

- Odtud

$$y = \frac{\sqrt{2}}{18} \qquad \text{nebo} \qquad y = -\frac{\sqrt{2}}{18}.$$

Příklad 1

- Dopočtete x a λ.
- Další stacionární body tedy jsou

$$B = \left[-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{18}, \frac{\sqrt{2}}{27}\right], \qquad C = \left[\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{18}, -\frac{\sqrt{2}}{27}\right].$$

Příklad 1

- Dopočtete x a λ.
- Další stacionární body tedy jsou

$$B = \left[-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{18}, \frac{\sqrt{2}}{27}\right], \qquad C = \left[\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{18}, -\frac{\sqrt{2}}{27}\right].$$

Příklad 1

- Pro vyšetřování typu extrému začněte s bodem B.
- Dosadíte-li do L za λ hodnotu $\frac{\sqrt{2}}{27}$, dostanete

$$\tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}} = 27x^3y^2 - \arctan x + \frac{\sqrt{2}}{27}\left(9x^2 + \frac{x}{y}\right)$$

- Dále si spočtěte druhé parciální derivace této funkce. K tomu můžete využít už spočtené první derivace funkce L, ovšem s dosazeným λ.

Příklad 1

- Pro vyšetřování typu extrému začněte s bodem B.
- Dosadíte-li do L za λ hodnotu $\frac{\sqrt{2}}{27}$, dostanete

$$\tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}} = 27x^3y^2 - \arctan x + \frac{\sqrt{2}}{27}\left(9x^2 + \frac{x}{y}\right)$$

- Dále si spočtěte druhé parciální derivace této funkce. K tomu můžete využít už spočtené první derivace funkce L, ovšem s dosazeným λ.

Příklad 1

- Pro vyšetřování typu extrému začněte s bodem B.
- Dosadíte-li do L za λ hodnotu $\frac{\sqrt{2}}{27}$, dostanete

$$\tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}} = 27x^3y^2 - \operatorname{arctan} x + \frac{\sqrt{2}}{27}\left(9x^2 + \frac{x}{y}\right)$$

- Dále si spočtěte druhé parciální derivace této funkce. K tomu můžete využít už spočtené první derivace funkce L, ovšem s dosazeným λ.

Příklad 1

- $$\begin{aligned} \tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}{}''_{xx} &= 162xy^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ \tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}{}''_{xy} &= 162x^2y - \frac{\sqrt{2}}{27y^2} \\ \tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}{}''_{yy} &= 54x^3 + \frac{2\sqrt{2}x}{27y^3} \end{aligned}$$
- Dosaďte nyní bod $\tilde{B} = \left[-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{18}\right]$ (projekci bodu $B = \left[-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{18}, \frac{\sqrt{2}}{27}\right]$).

Příklad 1

- $$\begin{aligned} \tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}{}''_{xx} &= 162xy^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ \tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}{}''_{xy} &= 162x^2y - \frac{\sqrt{2}}{27y^2} \\ \tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}{}''_{yy} &= 54x^3 + \frac{2\sqrt{2}x}{27y^3} \end{aligned}$$
- Dosaďte nyní bod $\tilde{B} = \left[-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{18}\right]$ (projekci bodu $B = \left[-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{18}, \frac{\sqrt{2}}{27}\right]$).

Příklad 1

- Po úpravách máte

$$\tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}{}''_{xx}\left(\tilde{B}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{9}$$
$$\tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}{}''_{xy}\left(\tilde{B}\right) = 12\sqrt{2}$$
$$\tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}{}''_{yy}\left(\tilde{B}\right) = -324\sqrt{2}$$

- Hessova matice pro funkci $\tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}$ je $\begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{2}}{9} & 12\sqrt{2} \\ 12\sqrt{2} & -324\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Příklad 1

- Po úpravách máte

$$\tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}{}''_{xx}\left(\tilde{B}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{9}$$
$$\tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}{}''_{xy}\left(\tilde{B}\right) = 12\sqrt{2}$$
$$\tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}{}''_{yy}\left(\tilde{B}\right) = -324\sqrt{2}$$

- Hessova matice pro funkci $\tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}$ je $\begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{2}}{9} & 12\sqrt{2} \\ 12\sqrt{2} & -324\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Příklad 1

- Determinanty

$$D_1 = -\frac{5\sqrt{2}}{9} \qquad D_2 = 72$$

  znamenají, že funkce $\tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}$ má v bodě $\tilde{B}$ lokální maximum.

- Proto má funkce f v bodě $\tilde{B}$ vázané maximum. Funkční hodnota v něm je $-\frac{\sqrt{2}}{3} + \arctan\sqrt{2}$.

Příklad 1

- Determinanty

$$D_1 = -\frac{5\sqrt{2}}{9} \qquad D_2 = 72$$

znamenají, že funkce $\tilde{L}_{\frac{\sqrt{2}}{27}}$ má v bodě $\tilde{B}$ lokální maximum.

- Proto má funkce f v bodě $\tilde{B}$ vázané maximum. Funkční hodnota v něm je $-\frac{\sqrt{2}}{3} + \arctan\sqrt{2}$.

Příklad 1

- Zcela analogicky zjistíte, že f má v bodě $\tilde{C} = \left[\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{18}\right]$ vázané minimum. Funkční hodnota v něm je $\frac{\sqrt{2}}{3} - \operatorname{arctan}\sqrt{2}$.
- Nakonec se podívejte na množinu bodů A_t. Postupujte stejně, za λ dosaďte t.

Příklad 1

- Zcela analogicky zjistíte, že f má v bodě $\tilde{C} = \left[\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{18}\right]$ vázané minimum. Funkční hodnota v něm je $\frac{\sqrt{2}}{3} - \arctan\sqrt{2}$.
- Nakonec se podívejte na množinu bodů A_t. Postupujte stejně, za λ dosaďte t.

Příklad 1

- Dostanete

$$\tilde{L}_t = 27x^3y^2 - \arctan x + t\left(9x^2 + \frac{x}{y}\right)$$

a zase si spočtěte druhé parciální derivace této funkce.

- Ty vycházejí

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_t{}''_{xx} &= 162xy^2 + 18t + \frac{2x}{(1+x^2)^2} \\
\tilde{L}_t{}''_{xy} &= 162x^2y - \frac{t}{y^2} \\
\tilde{L}_t{}''_{yy} &= 54x^3 + \frac{2tx}{y^3}
\end{aligned}$$

Příklad 1

- Dosaďte nyní bod $\tilde{A}_t = [0, t]$ (projekci bodu $A_t = [0, t, t]$).
- Po úpravách máte

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t{}''_{xx}\left(\tilde{A}_t\right) &= 18t \\ \tilde{L}_t{}''_{xy}\left(\tilde{A}_t\right) &= -\frac{1}{t} \\ \tilde{L}_t{}''_{yy}\left(\tilde{A}_t\right) &= 0 \end{aligned}$$

- Hessova matice pro funkci $\tilde{L}_t$ je $\begin{pmatrix} 18t & -\frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 1

- Dosaďte nyní bod $\tilde{A}_t = [0, t]$ (projekci bodu $A_t = [0, t, t]$).
- Po úpravách máte

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t{}''_{xx}\left(\tilde{A}_t\right) &= 18t \\ \tilde{L}_t{}''_{xy}\left(\tilde{A}_t\right) &= -\frac{1}{t} \\ \tilde{L}_t{}''_{yy}\left(\tilde{A}_t\right) &= 0 \end{aligned}$$

- Hessova matice pro funkci $\tilde{L}_t$ je $\begin{pmatrix} 18t & -\frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 1

- Dosaďte nyní bod $\tilde{A}_t = [0, t]$ (projekci bodu $A_t = [0, t, t]$).
- Po úpravách máte

$$
\begin{aligned}
\tilde{L}_t{}''_{xx}\left(\tilde{A}_t\right) &= 18t \\
\tilde{L}_t{}''_{xy}\left(\tilde{A}_t\right) &= -\frac{1}{t} \\
\tilde{L}_t{}''_{yy}\left(\tilde{A}_t\right) &= 0
\end{aligned}
$$

- Hessova matice pro funkci $\tilde{L}_t$ je $\begin{pmatrix} 18t & -\frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 1

- Pak je ale $D_2 = -\frac{1}{t^2}$, a tedy záporné pro každou hodnotu t. To ovšem znamená, že funkce $\tilde{L}_t$ nemá v žádném bodě $\tilde{A}_t$ lokální extrém.
- Z toho ale neplyne neexistence lokálních extrémů f v bodech $\tilde{A}_t$.

Příklad 1

- Pak je ale $D_2 = -\frac{1}{t^2}$, a tedy záporné pro každou hodnotu t. To ovšem znamená, že funkce $\tilde{L}_t$ nemá v žádném bodě $\tilde{A}_t$ lokální extrém.
- Z toho ale neplyne neexistence lokálních extrémů f v bodech $\tilde{A}_t$.

Příklad 1

- Přitom je situace na přímce $x = 0$ jednoduchá, až triviální. Jednak je jasné, že *ostrý* vázaný extrém celá přímka představovat nemůže.
- Použijeme-li metodu dosazení pro přímku $x = 0$, dostaneme konstantní (nulovou) funkci, která nemá ostrý extrém v žádném bodě.
- A konečně, na okolí každého bodu přímky $x = 0$ ve směru kladného násobku vektoru $(1, 0)$ je hodnota f kladná a ve směru záporného násobku vektoru $(1, 0)$ je hodnota f záporná. Nejde tedy ani o extrém neostrý.

Příklad 1

- Přitom je situace na přímce $x = 0$ jednoduchá, až triviální. Jednak je jasné, že *ostrý* vázaný extrém celá přímka představovat nemůže.
- Použijeme-li metodu dosazení pro přímku $x = 0$, dostaneme konstantní (nulovou) funkci, která nemá ostrý extrém v žádném bodě.
- A konečně, na okolí každého bodu přímky $x = 0$ ve směru kladného násobku vektoru $(1, 0)$ je hodnota f kladná a ve směru záporného násobku vektoru $(1, 0)$ je hodnota f záporná. Nejde tedy ani o extrém neostrý.

Příklad 1

- Přitom je situace na přímce $x = 0$ jednoduchá, až triviální. Jednak je jasné, že *ostrý* vázaný extrém celá přímka představovat nemůže.
- Použijeme-li metodu dosazení pro přímku $x = 0$, dostaneme konstantní (nulovou) funkci, která nemá ostrý extrém v žádném bodě.
- A konečně, na okolí každého bodu přímky $x = 0$ ve směru kladného násobku vektoru $(1, 0)$ je hodnota f kladná a ve směru záporného násobku vektoru $(1, 0)$ je hodnota f záporná. Nejde tedy ani o extrém neostrý.

Příklad 1

Závěr: funkce

$$f(x, y) = 27x^3y^2 - \arctan x$$

má pro vazebnou podmínku

$$9x^2 + \frac{x}{y} = 0$$

dva vázané extrémy; vázané maximum v bodě

$$\tilde{B} = \left[-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{18}\right]$$

kde

$$f(\tilde{B}) = -\frac{\sqrt{2}}{3} + \arctan\sqrt{2}$$

Příklad 1

a vázané minimum v bodě

$$\tilde{C} = \left[\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{18}\right]$$

kde

$$f(\tilde{C}) = \frac{\sqrt{2}}{3} - \arctan\sqrt{2}.$$

Příklad 2

- Označme $v_{0x} > 0$ a $v_{0y} > 0$ horizontální a vertikální složku počáteční rychlosti střely a $E_0 > 0$ počáteční kinetickou energii. Máme tedy

$$E_0 = \frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2\right)$$

- Celkový čas letu střely je roven

$$T = \frac{2v_{0y}}{g}$$

(horizontální složka okamžité rychlosti je nulová v polovině celkového času).

Příklad 2

- Označme $v_{0x} > 0$ a $v_{0y} > 0$ horizontální a vertikální složku počáteční rychlosti střely a $E_0 > 0$ počáteční kinetickou energii. Máme tedy

$$E_0 = \frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2\right)$$

- Celkový čas letu střely je roven

$$T = \frac{2v_{0y}}{g}$$

(horizontální složka okamžité rychlosti je nulová v polovině celkového času).

Příklad 2

- Dolet R je funkcí v_{0x} a v_{0y}, konkrétně

$$R = v_{0x}T = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}.$$

  Chceme zjistit, kdy je R maximální.

- Hledáme vázané maximum funkce

$$R(v_{0x}, v_{0y}) = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

  při vazebné podmínce

$$\frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0x}^2\right) - E_0 = 0.$$

Příklad 2

- Dolet R je funkcí v_{0x} a v_{0y}, konkrétně

$$R = v_{0x}T = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}.$$

Chceme zjistit, kdy je R maximální.

- Hledáme vázané maximum funkce

$$R(v_{0x}, v_{0y}) = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

při vazebné podmínce

$$\frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0x}^2\right) - E_0 = 0.$$

Příklad 2

- Lagrangeova funkce L zde má tvar

$$L(v_{0x}, v_{0y}, \lambda) = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} + \lambda\left(\frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0x}^2\right) - E_0\right).$$

- Zderivujte ji podle všech tří proměnných a vytvořte tak nelineární soustavu rovnic pro nalezení stacionárních bodů L.

Příklad 2

- Lagrangeova funkce L zde má tvar

$$L(v_{0x}, v_{0y}, \lambda) = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} + \lambda\left(\frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0x}^2\right) - E_0\right).$$

- Zderivujte ji podle všech tří proměnných a vytvořte tak nelineární soustavu rovnic pro nalezení stacionárních bodů L.

Příklad 2

- Máme

$$\begin{aligned}
\frac{2v_{0y}}{g} + \lambda m v_{0x} &= 0 \\
\frac{2v_{0x}}{g} + \lambda m v_{0y} &= 0 \\
\frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0x}^2\right) - E_0 &= 0.
\end{aligned}$$

- Nyní první rovnici vynásobte v_{0x}, druhou rovnici vynásobte v_{0y} a odečtěte je.

Příklad 2

- Máme

$$
\begin{aligned}
\frac{2v_{0y}}{g} + \lambda m v_{0x} &= 0 \\
\frac{2v_{0x}}{g} + \lambda m v_{0y} &= 0 \\
\frac{1}{2} m \left(v_{0x}^2 + v_{0x}^2 \right) - E_0 &= 0.
\end{aligned}
$$

- Nyní první rovnici vynásobte v_{0x}, druhou rovnici vynásobte v_{0y} a odečtěte je.

Příklad 2

- V získané rovnici $\lambda m \left(v_{0x}^2 - v_{0y}^2\right) = 0$ lze dělit m (hmotnost) i λ (nulové λ by narušilo podmínky $v_{0x} > 0$, $v_{0y} > 0$. Máte tedy

$$v_{0x}^2 - v_{0y}^2 = 0.$$

- Dosaďte do druhé rovnice a vyjádřete v_{0x}, v_{0y}.
-

$$v_{0x} = \sqrt{\frac{E_0}{m}}, \qquad v_{0y} = \sqrt{\frac{E_0}{m}}.$$

Příklad 2

- V získané rovnici $\lambda m\left(v_{0x}^2 - v_{0y}^2\right) = 0$ lze dělit m (hmotnost) i λ (nulové λ by narušilo podmínky $v_{0x} > 0$, $v_{0y} > 0$. Máte tedy

$$v_{0x}^2 - v_{0y}^2 = 0.$$

- Dosaďte do druhé rovnice a vyjádřete v_{0x}, v_{0y}.
-

$$v_{0x} = \sqrt{\frac{E_0}{m}}, \qquad v_{0y} = \sqrt{\frac{E_0}{m}}.$$

Příklad 2

- V získané rovnici $\lambda m\left(v_{0x}^2 - v_{0y}^2\right) = 0$ lze dělit m (hmotnost) i λ (nulové λ by narušilo podmínky $v_{0x} > 0$, $v_{0y} > 0$. Máte tedy

$$v_{0x}^2 - v_{0y}^2 = 0.$$

- Dosaďte do druhé rovnice a vyjádřete v_{0x}, v_{0y}.
-

$$v_{0x} = \sqrt{\frac{E_0}{m}}, \qquad v_{0y} = \sqrt{\frac{E_0}{m}}.$$

Příklad 2

- Protože nám horizontální i vertikální složka počáteční rychlosti vyšly stejné, znamená to maximální dolet pro úhel $\frac{\pi}{4}$.
- Není nutno zde vyšetřovat druhý diferenciál, že jde o maximum, plyne z fyzikálního významu úlohy.
- Dopočtete-li R, dostanete

$$R = \frac{2E_0}{mg}.$$

Příklad 2

- Protože nám horizontální i vertikální složka počáteční rychlosti vyšly stejné, znamená to maximální dolet pro úhel $\frac{\pi}{4}$.
- Není nutno zde vyšetřovat druhý diferenciál, že jde o maximum, plyne z fyzikálního významu úlohy.
- Dopočtete-li R, dostanete

$$R = \frac{2E_0}{mg}.$$

Příklad 2

- Protože nám horizontální i vertikální složka počáteční rychlosti vyšly stejné, znamená to maximální dolet pro úhel $\frac{\pi}{4}$.
- Není nutno zde vyšetřovat druhý diferenciál, že jde o maximum, plyne z fyzikálního významu úlohy.
- Dopočtete-li R, dostanete

$$R = \frac{2E_0}{mg}.$$

Příklad 2

Závěr: střela má maximální dolet

$$R = \frac{2E_0}{mg}$$

pro vazebnou podmínku

$$v_{0x} = \sqrt{\frac{E_0}{m}}, \qquad v_{0y} = \sqrt{\frac{E_0}{m}}$$

, tzn. pro výstřel v úhlu

$$\frac{\pi}{4}.$$

Příklad 3 *

- Najděte vázané extrémy funkce $f(x, y) = xy$ za podmínky $x^2 + y^2 = 1$. (Zde nebudeme uvádět detailně celý postup. Jde nám jen o řešení situace, kdy metoda Lagrangeových multiplikátorů nedá konečný výsledek.)
- Sestavte Lagrangeovu funkci $L = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, jejíž a obvyklým postupem spočtěte její 4 stacionární body $A = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right]$, $B = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right]$, $C = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right]$ a $D = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right]$.

Příklad 3 *

- Najděte vázané extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $x^2 + y^2 = 1$. (Zde nebudeme uvádět detailně celý postup. Jde nám jen o řešení situace, kdy metoda Lagrangeových multiplikátorů nedá konečný výsledek.)
- Sestavte Lagrangeovu funkci $L = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, jejíž a obvyklým postupem spočtěte její 4 stacionární body $A = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right]$, $B = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right]$, $C = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right]$ a $D = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right]$.

Příklad 3 *

- Determinanty Hessovy matice funkce $\tilde{L}_{-\frac{1}{2}}$ v bodě $\tilde{A} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ vycházejí $D_1 = -1$ a $D_2 = 0$, druhý diferenciál je negativně semidefinitní a o vázaném extrému v $\tilde{A}$ nerozhodneme. Zdiferencovaná vazba je

$$2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0$$

a tedy

$$\mathrm{d}y = -\frac{x}{y}\mathrm{d}x.$$

Příklad 3 *

- Po dosazení do $\mathrm{d}^2\tilde{L}_{-\frac{1}{2}}$ dostanete

$$\mathrm{d}^2\tilde{L}_{-\frac{1}{2}} = -\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \mathrm{d}y^2 =$$
$$-\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\frac{-x}{y}\mathrm{d}x - \left(\frac{-x}{y}\right)^2\mathrm{d}x^2 =$$
$$-\left(1 + \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}x^2.$$

- Po dosazení bodu $\tilde{A}$ získáme kvadratickou formu $-4\mathrm{d}x^2$, která je negativně definitní a funkce f má proto v bodě $\tilde{A}$ vázané maximum.

Příklad 3 *

- Po dosazení do $\mathrm{d}^2\tilde{L}_{-\frac{1}{2}}$ dostanete

$$\mathrm{d}^2\tilde{L}_{-\frac{1}{2}} = -\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \mathrm{d}y^2 =$$
$$-\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\frac{-x}{y}\mathrm{d}x - \left(\frac{-x}{y}\right)^2\mathrm{d}x^2 =$$
$$-\left(1 + \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}x^2.$$

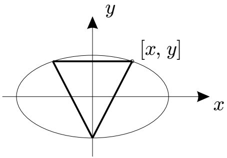
- Po dosazení bodu $\tilde{A}$ získáme kvadratickou formu $-4\mathrm{d}x^2$, která je negativně definitní a funkce f má proto v bodě $\tilde{A}$ vázané maximum.

Příklad 3 *

Závěr: zdiferencováním vazby jsme zjistili vázané maximum v $\tilde{A}$, kde Lagrangeova metoda nedala konečnou odpověď. Obdobně můžeme postupovat pro $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ a $\tilde{D}$.

Příklad 4

- Do elipsy vepište rovnoramenný trojúhelník se základnou rovnoběžnou s jednou z os elipsy tak, aby obsah trojúhelníku byl maximální.



Příklad 4

- Pro obsah trojúhelníka platí

$$P(x,y) = \frac{2x(y+b)}{2} = x(y+b)$$

za podmínky

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

- Hledáme tedy vázané extrémy pomocí Langrangeovy funkce

$$L(x,y,\lambda) = x(y+b) + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right).$$

Příklad 4

- Pro obsah trojúhelníka platí

$$P(x, y) = \frac{2x(y+b)}{2} = x(y+b)$$

za podmínky

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

- Hledáme tedy vázané extrémy pomocí Langrangeovy funkce

$$L(x, y, \lambda) = x(y+b) + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right).$$

Příklad 4

- Spočtete parciální derivace a upravujete nelineární soustavu:

$$L'_x = y + b + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2(y+b) + 2\lambda x = 0$$

$$L'_y = x + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 x + 2\lambda y = 0$$

$$L'_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2y^2 + a^2by = b^2x^2 \\ x^2b^2 + y^2a^2 - a^2b^2 = 0 \end{array}\right\} a^2y^2 + a^2by = a^2b^2 - y^2a^2 \Rightarrow 2y^2 + by - b^2 = 0.$$

Příklad 4

- Soustava rovnic vede na kvadratickou rovnici, z níž získáte dvě řešení:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm 3b}{4} = \begin{cases} y_1 = \frac{b}{2}, \\ y_2 = -b. \end{cases}$$

- Nyní již snadno rozhodnete o extrémech – v případě y-ové souřadnice $-b$ má trojúhelník nulovou výšku, tedy i nulový obsah, jedná se o vázané minimum. Naopak v případě y-ové souřadnice $\frac{b}{2}$ má trojúhelník maximální obsah.

Příklad 4

- Soustava rovnic vede na kvadratickou rovnici, z níž získáte dvě řešení:

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm 3b}{4} = \begin{cases} y_1 = \frac{b}{2}, \\ y_2 = -b. \end{cases}$$

- Nyní již snadno rozhodnete o extrémech – v případě y-ové souřadnice $-b$ má trojúhelník nulovou výšku, tedy i nulový obsah, jedná se o vázané minimum. Naopak v případě y-ové souřadnice $\frac{b}{2}$ má trojúhelník maximální obsah.

Příklad 4

Závěr: rovnoramenný trojúhelník se základnou rovnoběžnou s jednou z os elipsy vepíšeme do elipsy tak, aby základna protínala poloosu elipsy v její polovině: pak je obsah trojúhelníku maximální.

Příklad 5

Najděte globální extrémy funkce $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, jejímž definičním oborem je čtverec $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Příklad 5

- Napřed najděte lokální extrémy.
-

$$\begin{aligned} f'_x &= \cos x + \cos(x+y) \\ f'_y &= \cos y + \cos(x+y) \end{aligned}$$

$$\cos x = \cos y \qquad \Rightarrow x = y$$

Příklad 5

- Napřed najděte lokální extrémy.
-

$$\begin{aligned} f'_x &= \cos x + \cos(x+y) \\ f'_y &= \cos y + \cos(x+y) \end{aligned}$$

$$\cos x = \cos y \qquad \Rightarrow x = y$$

Příklad 5

$$
\begin{aligned}
\cos x + \cos 2x &= 0 \\
\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x &= 0 \\
\cos x + \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) &= 0 \\
2\cos^2 x + \cos x - 1 &= 0 \\
\cos x &= \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \notin D(f) \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{stacionární bod } A = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$

Příklad 5

$$
\begin{aligned}
f''_{xx} &= -\sin x - \sin(x+y)\,, f''_{xx}(A) = -\sqrt{3} \\
f''_{xy} &= -\sin(x+y)\,, f''_{xy}(A) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
f''_{yy} &= -\sin y - \sin(x+y)\,, f''_{yy}(A) = -\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
H = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad D_1 = -\sqrt{3} < 0 \qquad D_2 = \frac{9}{4} > 0
$$

V bodě A je lokální maximum, $f(A) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Příklad 5

- Nyní hledejte vázané extrémy, zvlášť pro každou část hranice, tedy pro každou stranu čtverce.
- $x = 0 \qquad y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
  $\widetilde{f}(y) = 2 \sin y$
  Vázané minimum v bodě $B = [0, 0]$, $f(B) = 0$
  Vázané maximum v bodě $C = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(C) = 2$
- $y = 0 \qquad x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
  Vázané minimum v bodě $B = [0, 0]$, $f(B) = 0$
  Vázané maximum v bodě $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(D) = 2$

Příklad 5

- Nyní hledejte vázané extrémy, zvlášť pro každou část hranice, tedy pro každou stranu čtverce.
- $x = 0 \qquad y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
  $\widetilde{f}(y) = 2 \sin y$
  Vázané minimum v bodě $B = [0, 0]$, $f(B) = 0$
  Vázané maximum v bodě $C = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(C) = 2$
- $y = 0 \qquad x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
  Vázané minimum v bodě $B = [0, 0]$, $f(B) = 0$
  Vázané maximum v bodě $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(D) = 2$

Příklad 5

- Nyní hledejte vázané extrémy, zvlášť pro každou část hranice, tedy pro každou stranu čtverce.
- $x = 0 \qquad y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
  $\widetilde{f}(y) = 2\sin y$
  Vázané minimum v bodě $B = [0,0]$, $f(B) = 0$
  Vázané maximum v bodě $C = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(C) = 2$
- $y = 0 \qquad x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
  Vázané minimum v bodě $B = [0,0]$, $f(B) = 0$
  Vázané maximum v bodě $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(D) = 2$

Příklad 5

- $x = \frac{\pi}{2} \qquad y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
  $\widetilde{f}(y) = 1 + \sin y + \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = 1 + \sin y + \cos y$
  $\widetilde{f}' = \cos y - \sin y = 0 \qquad y = \frac{\pi}{4}$
  $\widetilde{f}'' = -\sin y - \cos y \qquad \widetilde{f}''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$
  Vázané maximum v bodě $E = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right], f(E) = 1 + \sqrt{2}$
- $y = \frac{\pi}{2} \qquad x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
  Vázané maximum v bodě $F = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], f(F) = 1 + \sqrt{2}$

Příklad 5

- $x = \frac{\pi}{2} \qquad y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
  $\widetilde{f}(y) = 1 + \sin y + \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = 1 + \sin y + \cos y$
  $\widetilde{f}' = \cos y - \sin y = 0 \qquad y = \frac{\pi}{4}$
  $\widetilde{f}'' = -\sin y - \cos y \qquad \widetilde{f}''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$
  Vázané maximum v bodě $E = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right], f(E) = 1 + \sqrt{2}$
- $y = \frac{\pi}{2} \qquad x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
  Vázané maximum v bodě $F = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], f(F) = 1 + \sqrt{2}$

Příklad 5

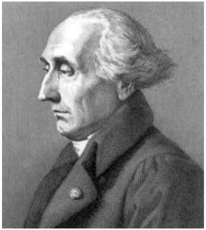
Závěr: Globální minimum je v bodě

$$B = [0,0] \qquad f(B) = 0$$

a globální maximum v bodě

$$A = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \qquad f(A) = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

což jsme zjistili porovnáním funkčních hodnot všech lokálních a vázaných minim a lokálních a vázaných maxim.



Lagrange