Variační počet

Miroslav Kureš

28. dubna 2020

Variační počet. *(Ukázkové úlohy do testu.)*

1. Najděte funkci $y(x)$ realizující extrémy funkcionálu

$$\int_{-1}^{1} \left(xy' + \sqrt{y'} \right) \mathrm{d}x,$$

s pevnými okrajovými podmínkami

$$y(-1) = -1 \qquad y(1) = 1.$$

Nejprve si můžeme dosadit několik funkcí, které vyhovují okrajovým podmínkám a spočíst hodnotu integrálu. Je to zajímavé a může nás to dovést k nějakým předběžným domněnkám o minimální a maximální hodnotě.

(i) pro liché polynomy x^{2n-1} integrál vychází $\frac{2\sqrt{2n-1}}{n}$ (v limitě 0)

(ii) pro konkávní polynomy sudého stupně $1-\frac{1}{2^{2n-1}}(x-1)^{2n}$ integrál vychází $\frac{2}{2n+1}\left(1-2n+2\sqrt{2n}\right)$ (v limitě -2)

(iii) pro konvexní polynomy sudého stupně $-1+\frac{1}{2^{2n-1}}(x+1)^{2n}$ integrál vychází $\frac{2}{2n+1}\left(2n-1+2\sqrt{2n}\right)$ (v limitě 2)

Protože lagrangián nezávisí na y, použijeme Eulerovu rovnici ve speciálním tvaru $\frac{\partial L}{\partial y'} = c$:

$$x + \frac{1}{2\sqrt{y'}} = c_1; \tag{1}$$

tuto rovnici pak snadno vyřešíme přímou integrací. Obecné řešení je

$$y = \frac{1}{4(c_1 - x)} + c_2 \tag{2}$$

a dosazením okrajových podmínek spočteme

$$c_1 = \frac{\sqrt{5}}{2},\ c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} \tag{3}$$

vedoucí (po úpravě) k řešení

$$y = \frac{\sqrt{5}x - 2}{-2x + \sqrt{5}}. \tag{4}$$

Pozor! Nelze uvažovat $c_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $c_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Důvod je ten, že z (1) plyne, že $c_1 - x$ musí být nezáporné!

Pak

$$y' = \frac{1}{(-2x + \sqrt{5})^2}. \tag{5}$$

Spočteme nyní $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}$ a vypočtenou derivaci dosadíme. Dostaneme

$$-\frac{(-2x + \sqrt{5})^3}{4} \text{ a to je na intervalu } [-1, 1] \text{ záporné.} \tag{6}$$

Přejdeme k výpočtu konjugovaných bodů. Zderivujeme $y(x, c_1, c_2)$ podle c_1 a c_2, pak dosadíme bod $A = [-1, -1]$. To vede na následující rovnici pro nalezení konjugovaných bodů pro spočtenou funkci y:

$$\frac{-\frac{1}{4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)^2}}{1} = \frac{-\frac{1}{4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-x\right)^2}}{1} \tag{7}$$

Řešením je -1 a $1+\sqrt{5} > 1$. První konjugovaný bod k A je tedy až za bodem $B = [1,1]$. Funkce y proto realizuje maximum. Můžeme spočíst, že pro y je hodnota integrálu

$$\sqrt{5} + \frac{\operatorname{argsinh} 2}{2} \approx 2.95788572.$$

Ještě si můžeme položit otázku, jak je to s minimem. Viděli jsme, že se lze přiblížit libovolně k hodnotě -2. Lze ale této hodnoty dosáhnout?

2. Pro tutéž úlohu napište a vyřešte Hamiltonovu-Jacobiho rovnici. Z řešení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice odvoďte řešení kanonických rovnic a Eulerovy rovnice.

Začneme Legendreovou transformací.

$$p = x + \frac{1}{2\sqrt{y'}}, \tag{8}$$

z toho

$$y' = \frac{1}{4\,(p-x)^2}. \tag{9}$$

Hamiltonián

$$H = -x\frac{1}{4\,(p-x)^2} - \frac{1}{2\,(p-x)} + p\frac{1}{4\,(p-x)^2} = -\frac{1}{4\,(p-x)} \tag{10}$$

a kanonické rovnice pak jsou

$$0 = -p', \qquad\qquad \frac{1}{4\,(p-x)^2} = y'. \tag{11}$$

(Viz (2)!)

Hamiltonova-Jacobiho rovnice pak je

$$\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{4\left(\frac{\partial S}{\partial y} - x\right)} = 0 \tag{12}$$

a to je separovatelná rovnice:

$$4x + \frac{1}{S'_x} = 4S'_y. \tag{13}$$

Máme

$$4x + \frac{1}{S'_x} = 4S'_y = a \tag{14}$$

a tedy

$$S'_x = \frac{1}{a - 4x}, \qquad S'_y = \frac{a}{4}. \tag{15}$$

Integrací dostaneme úplné řešení

$$S = -\frac{1}{4}\ln(a - 4x) + \frac{a}{4}y + b. \tag{16}$$

Ano, u logaritmu není absolutní hodnota. To plyne ze skutečnosti, že $p - x$ je nezáporné. Pozorovali jsme totéž vlastně už u **1.**

Použijeme Jacobiho větu (neuvažujeme-li aditivní konstantu b v úplném řešení, máme $S = -\frac{1}{4}\ln(c - 4x) + \frac{c}{4}y$ a tedy vztahy

$$-\frac{1}{4(c - 4x)} + \frac{y}{4} = k, \qquad p = \frac{c}{4} \tag{17}$$

představují řešení kanonických rovnic. Skutečně, mj. vidíme, že

$$y = 4k + \frac{1}{c - 4x} \tag{18}$$

není nic jiného než (2), kde $c = 4c_1$ a $4k = c_2$.